

Mathematik (normales Niveau)

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , e , etc. stehen. Falls Sie dennoch die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Für die Maximalnote sind höchstens 40 Punkte nötig.

1. Die Funktion f sei durch folgende Bedingungen gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3, & \text{für } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie a und b so, dass f für alle reellen x differenzierbar wird.
 b) Berechnen Sie sodann die Nullstellen und Extremwerte von f und erstellen Sie eine möglichst genaue Skizze des Grafen von f (Einheit 4 Häuschen).

c) $\int_{-1}^{+4} f(x) dx = ?$

2. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3e^{-x} - 1$.

- a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f mit den Koordinatenachsen und erstellen Sie eine möglichst genaue Skizze der Funktion. (Einheit 4 Häuschen)
 b) Unter welchem Winkel schneidet f die x -Achse?
 c) Wie gross ist der Inhalt des endlichen Flächenstücks, das vom Grafen von f und den Koordinatenachsen begrenzt wird.

3. Gegeben: Punkt $C(-4/3)$ und Kreis $k: x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

- a) Von C aus werden die Tangenten an k gelegt. Berechnen Sie ihren Zwischenwinkel.
 b) Diese Tangenten werden als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ABC aufgefasst, dessen Inkreis k sein soll. Geben Sie die Gleichung der Geraden (AB) und die Koordinaten der Ecken A und B an.
 c) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ?

4.1 Gegeben sind die beiden Vektoren $\overline{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overline{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Welchen Winkel schliessen die beiden Vektoren miteinander ein?
- Der Vektor \overline{OB} wird zum Vektor \overline{OB}' verlängert, bis das Dreieck OAB' rechtwinklig wird, wobei der rechte Winkel im Punkt A liegen soll.
Mit welchem Faktor muss \overline{OB} gestreckt werden und wie gross ist der Flächeninhalt des so erzeugten Dreiecks?

4.2 Ein Dreieck ABC ist durch die Seiten b und c mit ihrem Zwischenwinkel α ($\alpha \leq 90^\circ$) gegeben.

- Dem gegebenen Dreieck kann man ein Quadrat so einbeschreiben, dass eine Seite auf der Seite c liegt und zwei Ecken auf a und b zu liegen kommen. Wie gross ist eine Quadratseite?
 - Wie gross ist der Winkel α zu wählen, damit das in Aufgabe a) einbeschriebene Quadrat maximalen Flächeninhalt erhält.
5. a) Schütze A schießt mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 0,2.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er von fünf Schüssen zwei Treffer erzielt?
- b) Wenn Schütze B viermal schießt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens einmal trifft, gleich 0,5.
Wie gross ist seine Trefferwahrscheinlichkeit?
- c) Nun schießen beide auf eine Zielscheibe. Hier trifft A mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ und B mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ ins Zentrum.
Beide geben gleichzeitig einen Schuss ab. Genau eine Kugel ist im Zentrum.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus dem Lauf des Schützen A stammt?