Frühjahr 2006

1. Die Funktion f sei durch folgende Bedingungen gegeben :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3, & \text{für } x \leqslant 2 \\ ax + b, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

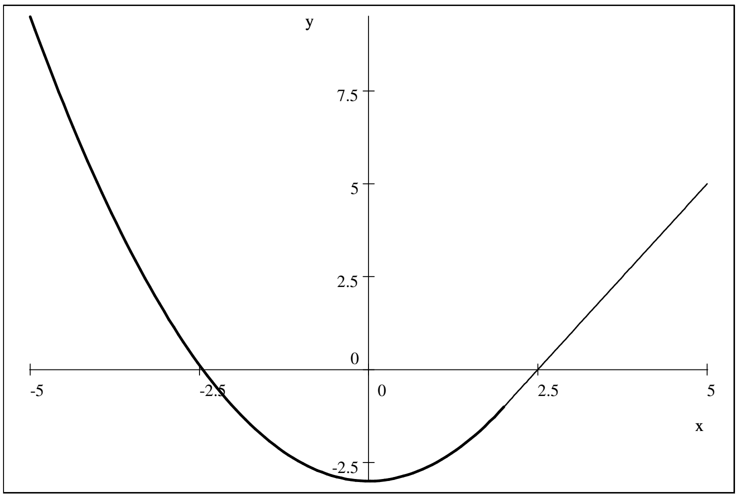
a) Bestimmen Sie a und b so, dass f für alle reellen x differenzierbar wird.

Da f sich aus zwei differenzierbaren Funktionen zusammensetzt, muss lediglich die Anschlussstelle x=2 überprüft werden.
Hier darf die Funktion weder einen Sprung machen ($f(2) = \lim_{h->0} f(2+h)$) und auch keinen Knick aufweisen ($f\prime(2) = \lim_{h->0} f\prime(2+h)$) :

$$\begin{aligned} f\prime(2) &= \lim_{h->0} f\prime(2+h) \\ 2 &= a \\ f(2) &= \lim_{h->0} f(2+h) \\ b &= -5 \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie sodann die Nullstellen und Extremwerte von f und erstellen Sie eine möglichst genaue Skizze.
Nullstellen :$x_{1/2} = \pm 2\sqrt{3}$; $x_3 = 5/2$

Die linke Nullstelle der Parabel $x = -2\sqrt{3}$ und die Nullstelle der Gerade $x = 2,5$ sind Nullstellen von f.
Geraden haben keine Extremwerte, also ist der Extremwert von f gleich dem Scheitel der Parabel bei (0|-3).



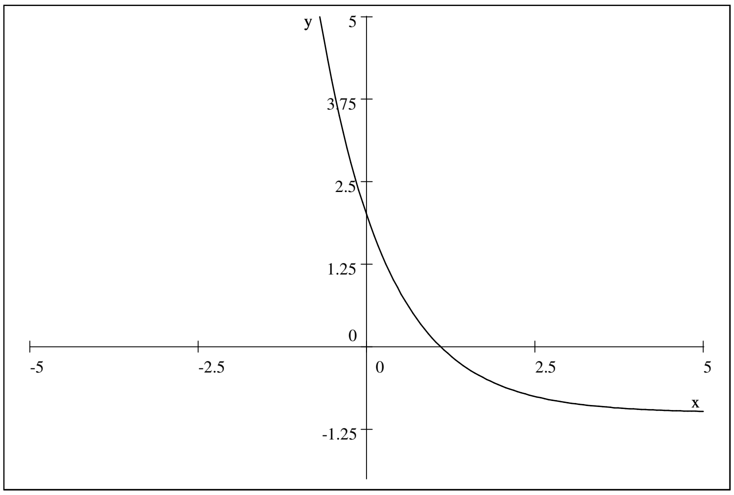
c)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{4} f(x)dx &= ? \\ \int_{-1}^{4} f(x)dx &= \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right) dx + \int_{2}^{4} (2x-5)\, dx = -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

2. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3e^{-x} - 1$

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und erstellen Sie eine möglichst genaue Skizze der Funktion.

$f(0) = 2 = y;\ x = \ln 3$



b) Unter welchem Winkel schneidet f die x-Achse ?
$\tan\alpha = f\prime(\ln 3) = -1$
$\alpha = 135°$

c) Wie gross ist der Inhalt des endlichen Flächenstücks, das vom Grafen und f und den Koordinatenachsen begrenzt wird ?

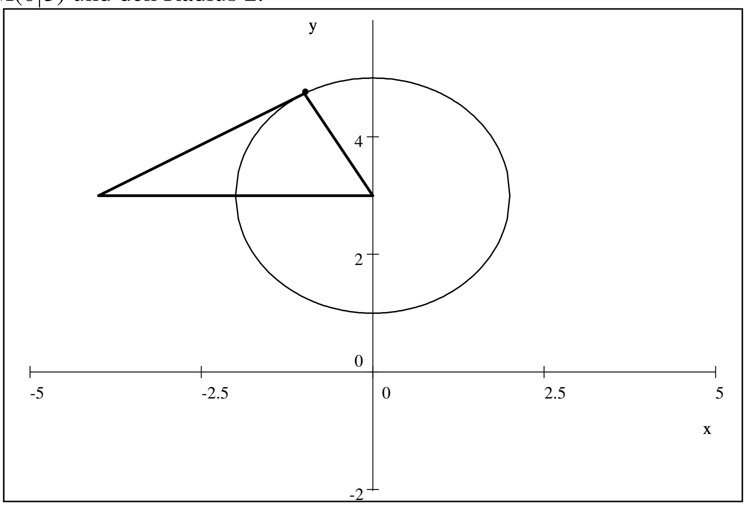
$$A = \underline{2 - \ln 3}$$

3. Gegeben : C(-4/3) und Kreis k: $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

a) Von C aus werden die Tangenten an k gelegt. Berechnen Sie ihren Zwischenwinkel.

$$x^2 + (y-3)^2 = 4$$

Der Kreis hat den Mittelpunkt M(0|3) und den Radius 2.



Der halbe Winkel zwischen den Tangenten ergibt sich offensichtlich zu

$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{R}{CM} = \frac{1}{2} \\ \alpha &= 60° \end{aligned}$$

b) Diese Tangenten werden als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ABC aufgefasst, dessen Inkreis k sein soll. Geben sie die Gleichung der Geraden AB und die Koordinaten der Ecken A und B an.

AB hat die Gleichung x=2.
Die Tangentengleichungen y_1 und y_2 durch C lauten (Steigungswinkel 30°, bzw. -30°) :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+4)+3 \\ y_2 &= -\frac{1}{3}\sqrt{3}(x+4)+3 \\ y_2(2) &= -2\sqrt{3}+3 \end{aligned}$$

$A(2|2\sqrt{3}+3)$ und $B(2|-2\sqrt{3}+3)$

c) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ?
$A = 12\sqrt{3}$

4.1 Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren miteinander ein ?

$$\begin{aligned} cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \alpha &= 45^\circ \end{aligned}$$

b) Der Vektor $\overrightarrow{OB}$ wird zum Vektor $\overrightarrow{OB\prime}$ verlängert, bis das Dreieck OAB' rechtwinkligg wird. Wobei der rechte Winkel bei A liegen soll.

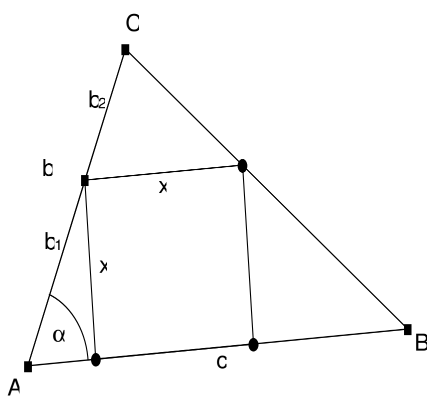
Mit welchem Faktor muss $\overrightarrow{OB}$ gestreckt werden und wie gross ist der Flächeninhalt des so erzeugten Dreiecks ?

$$\begin{aligned} I. &\quad \overrightarrow{OB'} = k\cdot\overrightarrow{OB} \\ II. &\quad \overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{OA} = 0 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Durch die Streckung von $\overrightarrow{OB}$ hat sich an dem 45° bei O nichts geändert. Da nach der Streckung ein 90° Winkel bei A vorhanden ist, ist der dritte Winkel ebenfalls 45°, also ist das Dreieck gleichschenklig. Die Fläche somit $A = \frac{81}{2}$

4.2 Ein Dreieck ABC ist durch die Seiten b und c mit ihrem Zwischenwinkel α ($\alpha \leq 90°$) gegeben.

a) Dem gegebenen Dreieck kann man ein Quadrat so einbeschreiben, dass eine Seite auf der Seite c liegt und zwei Ecken auf a und b zu liegen kommen. Wie gross ist eine Quadratseite ?

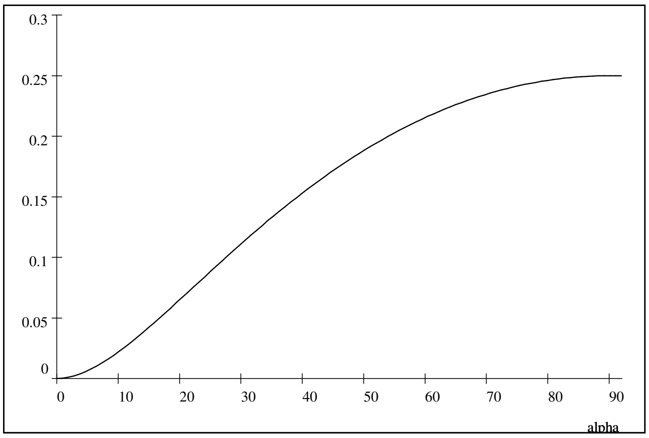


$$
\begin{aligned}
I.\frac{b_2}{x} &= \frac{b}{c} \\
II.\frac{x}{b_1} &= \sin\alpha \\
x &= \frac{bc\sin\alpha}{c+b\sin\alpha}
\end{aligned}
$$

b) Wie gross ist der Winkel α zu wählen, damit das Quadrat aus a) einen maximalen Flächeninhalt erhält ?

$$
\begin{aligned}
A &= x^2 \text{ ist maximal, wenn x maximal, da x}^2 \text{ streng monoton für x} \geq 0 \\
x(\alpha) &= \frac{bc\sin\alpha}{c+b\sin\alpha} \\
x'(\alpha) &= 0 \\
\cos\alpha &= 0 \\
\alpha &= 90^\circ
\end{aligned}
$$

Graphic von $A = x^2$ mit b=c=1 :



5.Ein Schütze schiesst mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 0,2.

a) Wie gross ist die WS, dass er von fünf Schüssen zwei Treffer erzielt ?

$$WS = 10 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 = 20.5\%$$

b) Wenn Schütze B viermal schiesst, so ist die WS für mindestens einen Treffer gleich 0,5.

Wie gross ist seine Trefferwahrscheinlichkeit ?
$p = 0.159\,1 = 15.9\%$

c) Nun schiessen beide auf eine Zielscheibe. Hier trifft A mit einer WS von 1/3 und B mit 1/4 ins Zentrum. Beide geben gleichzeitig einen Schuss ab. Genau eine Kugel ist im Zentrum.

Wie gross ist die WS, dass die Kugel von A stammt ?

$$\text{P(die Kugel ist von A)} = \frac{P_K(A)}{P_K(A)+P_K(B)} = \frac{3}{5} = 60\%$$