Schweizerische / Eidg. Maturitätsprüfung Gruppe / Kandidat/in Nr.: ....

Frühling 2007, Bern Name/Vorname: ....

Mathematik

Normales Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Es werden die Graphen der beiden Funktionen mit den Vorschriften $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = a(x-2)^2 + 4$ ($x \in R$) betrachtet.

   a) Skizzieren Sie die beiden Graphen für $a = -\frac{3}{4}$ und berechnen Sie dann die Schnittpunkte der beiden Graphen.
   Wie gross ist der Inhalt der Fläche, welche von den beiden Graphen eingeschlossen wird?

   b) Bestimmen Sie $a \in R$ derart, dass sich die Graphen der beiden Funktionen in einem Punkt berühren.

2. Eine Firma beschäftigt drei Mitarbeiter(innen), die telefonische Anfragen von Kunden beantworten sollen. Frau Kenner kann 90% aller Fragen zur Zufriedenheit der Kunden beantworten, Herr Gut 80% und Frau Patzer nur 55%.
   Die Anfragen werden zufällig auf die drei Mitarbeiter(innen) aufgeteilt.

   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde mit der Antwort, die er erhält, zufrieden ist?

   b) Ein Kunde hat eine zufrieden stellende Antwort erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er diese von Frau Kenner erhalten?

   c) An einem Tag sind 6 Anfragen gemacht worden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 davon zur Zufriedenheit des Kunden beantwortet wurden?

   d) Wie viele Fragen muss Frau Kenner mindestens beantworten, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 nicht alle Fragen zur Zufriedenheit beantwortet hat?

3. Lösen Sie die beiden voneinander unabhängigen Aufgaben.

3.1. Für jede reelle Zahl k sind die zwei Geraden a und b durch ihre Gleichungen gegeben.

a: $kx - 4y + k = 0$

b: $8x + (6k - 2)y - 3 = 0$

1) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden für $k = 2$.
2) Bestimmen Sie alle Werte von k, für welche die beiden Geraden senkrecht aufeinander stehen.

3.2. Die Flächeninhalte zweier Kreise K_1 mit Mittelpunkt M_1 (-11/3) und K_2 mit Mittelpunkt M_2 (17/15) verhalten sich wie 9 : 1. Die beiden Kreisflächen besitzen einen einzigen gemeinsamen Punkt B.
Bestimmen Sie B und die Gleichung der gemeinsamen Kreistangente in B.

4. Lösen Sie die drei voneinander unabhängigen Aufgaben.

4.1. Gegeben ist das Dreieck A(2/2/-3), B(-1/6/6), C(10/0/4).

a) Berechnen Sie den kleinsten Eckwinkel sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.
b) M_1 sei der Mittelpunkt der Seite a = BC, M_2 derjenige der Seite b = AC.
Beweisen Sie, dass die Verbindung M_1M_2 parallel zur Seite c = AB verläuft.

4.2. Bestimmen Sie alle $x \in R$ so, dass die Vektoren $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -x \end{pmatrix}$ linear abhängig sind (also keine Basis des R^2 bilden).

4.3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$\sin^3 x - \sin x = \sin x \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \sin^2 x$

in der Grundmenge $G = \{x \mid -\pi < x \leq \pi\}$.

5. Zwischen x = 0 und der ersten positiven Nullstelle der Funktion $f(x) = (x^2 - 1)^2$ werde ein Punkt P(x/y) auf dem Graphen gewählt. Er bildet mit den Punkten Q(x/0) und R(0/y) sowie dem Ursprung O(0/0) ein Rechteck.

a) Für welche Wahl von P wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal? Bestimmen Sie diesen maximalen Flächeninhalt F_1.

b) Das Rechteck OQPR werde um die y-Achse rotiert.
Für welche Wahl von P wird der Rauminhalt des dabei entstandenen Zylinders möglichst gross?

c) Das Rechteck, das in b) durch Rotation den maximalen Zylinder erzeugt, hat den Flächeninhalt F_2. Um wie viel Prozent ist der Inhalt von F_2 grösser oder kleiner als derjenige von F_1?