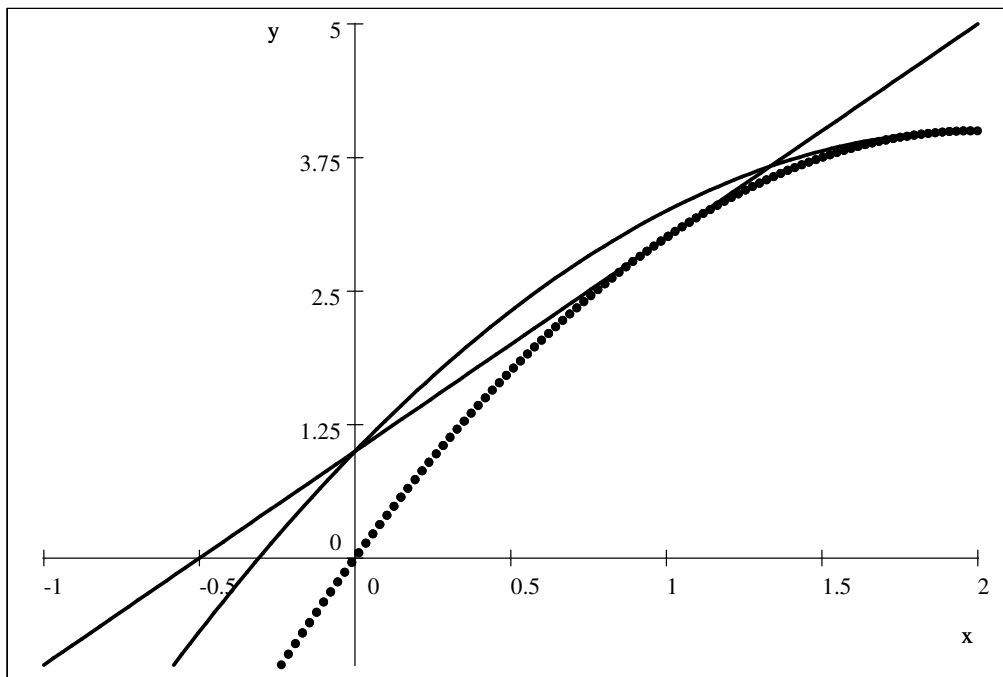


Frühjahr 2007

1. $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = a(x - 2)^2 + 4$

a) $a = -3/4$

Skizze, Schnittpunkte und eingeschlossene Fläche :



Nullstellen : $x_{1/2} = 0, \frac{4}{3}$

$$\underline{\underline{A}} = \int_0^{\frac{4}{3}} (g(x) - f(x)) dx = \underline{\underline{\frac{8}{27}}}$$

b) Finde a, so dass sich die Graphen berühren :

$$f(x) = 2x + 1 \text{ und } g(x) = a(x - 2)^2 + 4$$

Eine Lösungsidee : bei Berührung fallen die zwei Schnittpunkte zu einem zusammen, also Diskriminante = 0

$$: a = -1$$

Andere Lösungsidee : bei Berührung stimmen die Funktionen in ihren y-Werten und ihren Ableitungen überein :

$$\begin{aligned} I. f(x) &= g(x) \\ II. f'(x) &= g'(x) \\ a &= -1 \end{aligned}$$

2. Eine Firma beschäftigt drei Mitarbeiter, die telefonische Anfragen beantworten. Frau Kenner kann 90% aller Fragen zur Zufriedenheit beantworten, Herr Gut 80% und Frau Patzer nur 55%.

Die Anfragen werden zufällig an die drei verteilt.

a) Wie gross ist die WS, dass ein Kunde eine zufriedenstellende Antwort erhält ?

Er landet mit 1/3 bei jedem der drei.

$$WS = 30\% + 26.67\% + 18.33\% = 75\% \text{ aller Fälle.}$$

b) Ein Kunde hat eine zufriedenstellende Antwort erhalten. Wie gross ist die WS, dass diese von Frau Kenner kommt ?

$$WS = \frac{30\%}{75\%} = 40\%$$

c) An einem Tag sind 6 Anfragen gemacht worden. Wie gross ist die WS, dass mindestens 5 davon zur Zufriedenheit der Kunden ausgefallen sind ?

$$\text{WS}(\text{mindestens } 5) = \text{WS}(\text{genau } 5) + \text{WS}(\text{genau } 6) = 6 \cdot 0.75^5 \cdot 0.25 + 0.75^6 = 53.4\%$$

d) Wie viele Fragen muss Frau Kenner mindestens beantworten, damit sie mit einer WS von 0.99 nicht alle Fragen zur Zufriedenheit beantwortet hat ?

$$n \geq 44$$

3. Lösen Sie die von einander unabhängigen Aufgaben.

3.1 Für jede reelle Zahl k sind die zwei Geraden a und b durch die Gleichungen

$$a: kx - 4y + k = 0$$

$$b: 8x + (6k - 2)y - 3 = 0$$

1) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden für $k=2$

$$\text{Schnittwinkel ist } 26.565^\circ + 38.660^\circ = 65.226^\circ$$

2) Bestimmen Sie alle Werte von k , für die a und b senkrecht aufeinander stehen.

$$\begin{aligned} m_a \cdot m_b &= -1 \\ k &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3.2 Die Flächeninhalte zweier Kreise K_1 mit $M_1(-11|3)$ und K_2 mit $M_2(17|15)$ verhalten sich wie 9:1. Die beiden Kreisflächen besitzen einen einzigen gemeinsamen Punkt B .

Bestimmen Sie B und die Gleichung der gemeinsamen Tangente in B .

Wenn sich die Flächeninhalte (also im wesentlichen die Quadrate der Radien) wie 9:1 verhalten, dann die Radien wie 3:1 und daher wird die Strecke M_1M_2 im Verhältnis 3:1 geteilt, B hat als den Ortsvektor (innere Teilung):

$$\vec{r}_{B_i} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ und als äußere Teilung: } \vec{r}_{B_a} = \begin{pmatrix} 31 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die gemeinsame Tangente steht senkrecht auf } \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{senkrecht dazu: } \vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$t_i: \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$t_a: \vec{X} = \begin{pmatrix} 31 \\ 21 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix}$$

4. Lösen Sie die von einander unabhängigen Aufgaben.

4.1 Gegeben ist das Dreieck $A(2/2/-3)$, $B(-1/6/6)$ und $C(10/0/4)$.

a) Berechnen Sie den kleinsten Eckwinkel, sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Der kleinste Eckwinkel liegt der kleinsten Seite gegenüber:

$$AB = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{106}, AC = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{117}, CB = \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{161}$$

$$\cos \gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2bc} = \frac{86}{6279} \sqrt{2093} = 0.6266$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{86}{6279} \sqrt{2093}\right) = 51.2^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{117} \sqrt{161} \sin 51.2^\circ = 53.481$$

b) M_1 sei der Mittelpunkt von a, M_2 der Mittelpunkt von b. Beweisen Sie, dass M_1M_2 parallel zu c verläuft.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\vec{r}_C - \vec{r}_A}{2} - \frac{\vec{r}_C - \vec{r}_B}{2} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

Also ist M_1M_2 parallel und genau halb so lang wie c.

4.2 Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -x \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

$$\vec{e} = k \cdot \vec{f}$$

$$k = \pm\sqrt{2} \implies \underline{\underline{x = \pm 2\sqrt{2}}}$$

4.3 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung in der Grundmenge $G = \{x \mid -\pi < x < \pi\}$

$$\begin{aligned} \sin^3 x - \sin x &= \sin x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \\ \sin x &= 0 \implies x = 0 \text{ einzige Lösung in } G \\ 3 \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x + 1 &= 0 \\ \sin x_1 &= -\frac{1}{2} \implies x = -\frac{\pi}{6} \text{ und } x = -\frac{5}{6}\pi \text{ in } G \\ \sin x_2 &= 2 \implies \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

5. Zwischen $x=0$ und der ersten positiven Nullstelle der Funktion $f(x) = (x^2 - 1)^2$ werde ein Punkt $P(x|y)$ auf dem Graphen gewählt. Er bildet mit den Punkten $Q(x|0)$ und $R(0|y)$ sowie dem Ursprung $O(0|0)$ ein Rechteck.

a) Für welche Wahl von P wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal ?

Bestimmen Sie diesen maximalen Inhalt.

$$A(x) = x - 2x^3 + x^5$$

A wird maximal, entweder an den Rändern des Definitionsbereichs $[0; 1]$ oder dort wo die erste Ableitung gleich 0 wird und ihr Vorzeichen wechselt.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ x_{1-4} &= 1, -1, -\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{aligned}$$

Der in Frage kommende Wert ist $x_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

Am Rand von D ist $A(0)=0$ bzw. $A(1)=0$, also minimal. Probe ob x_4 auch ein Maximum liefert :

$$A'(\frac{1}{5}\sqrt{5}) = -\frac{8}{5}\sqrt{5} < 0, \text{ also ein Maximum.}$$

$$\text{Der Wert des Flächeninhalts ist } A(\frac{1}{5}\sqrt{5}) = \frac{16}{125}\sqrt{5} = F_1$$

b) Das Rechteck OQPR werde um die y-Achse rotiert. Für welchen Wert von x wird der Rauminhalt des entstehenden Zylinders maximal ?

$$V(x) = G \cdot H = \pi(x^2 - 2x^4 + x^6)$$

$$\begin{aligned} V'(x) &= 0 \\ x_{1-5} &= -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, -1, 0, 1 \end{aligned}$$

Der in Frage kommende Wert ist $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Am Rand von D ist $V(0)=0$ bzw. $V(1)=0$, also minimal. Probe ob x_2 auch ein Maximum liefert :

$V''(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{8}{3}\pi < 0$, also ein Maximum.

Der Wert des Flächeninhalts ist $V(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{4}{27}\pi$

c) Das Rechteck, das in b) durch Rotation eines Zylinders erzeugt, hat den Flächeninhalt F_2 . Um wie viel Prozent ist der Inhalt von F_2 grösser oder kleiner als derjenige von F_1 ?

$$F_2 = \frac{4}{27}\sqrt{3}$$

$$F_1 = \frac{16}{125}\sqrt{5}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{16}{125}\sqrt{5}}{\frac{4}{27}\sqrt{3}} = \frac{36}{125}\sqrt{15} = 1.1154$$

F_1 ist um 11,54% grösser als F_2