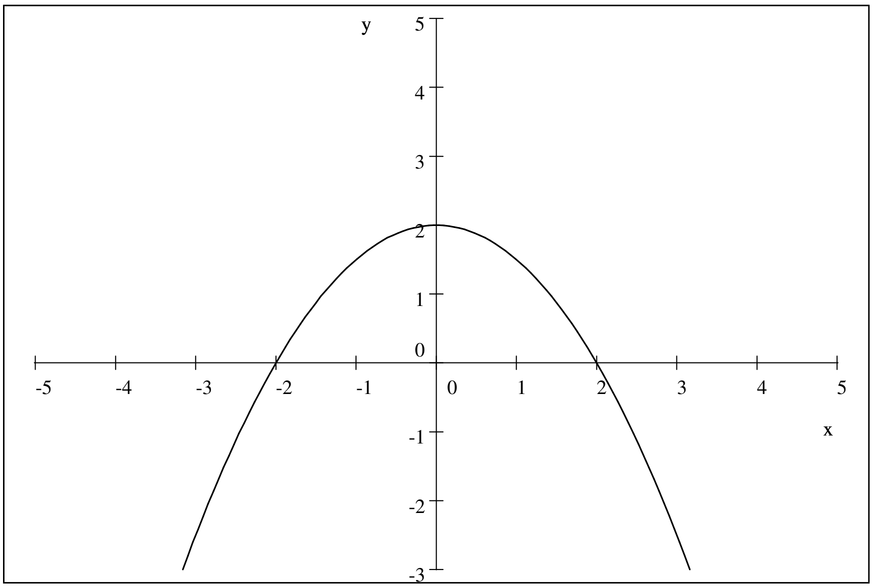
Frühjahr 2008

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 + 2$, a konstant.

   a) Es sei a=-0,5
   Berechnen Sie den Schnittwinkel des Grafen von f mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie den Grafen.

$$\begin{aligned}
x &= \pm 2 \\
f\prime(\pm 2) &= \mp 2 = \tan \alpha_{1/2} \\
\alpha_{1/2} &= \mp 63,43^\circ \\
\alpha_1 &= 116.57^\circ \\
\alpha_2 &= 63,57^\circ \\
f\prime(0) &= 0 \\
\text{waagerechte Tangente bei x} &= 0
\end{aligned}$$



$$A = \frac{16}{3}$$

In Parabelbogen einbeschriebenes Trapez ABCD : A(-2|0), B(2|0), C(x|f(x)), D(-x|f(-x)), $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
A(x) &= (2 + x)\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) \\
A\prime(x) &= 0 \\
x_1 &= -2 \notin D \\
x_2 &= \frac{2}{3} \\
A\prime\prime\left(\frac{2}{3}\right) &< 0 \text{ also Maximum} \\
& \ \text{Randwerte} \\
A(2) &= 0 \\
A(0) &= 0 \\
& \ \text{beides Randminima} \\
\text{Also } \mathrm{A}_{\max} &= A\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{128}{27}
\end{aligned}$$

   b) Es sei a wieder beliebig.

Wie ist a zu wählen, damit ein Schnittwinkel des Grafen mit der x-Achse von 45° entsteht ?

$$\begin{aligned}
x &= \pm\sqrt{-\frac{2}{a}} \text{ für } a < 0 \\
f\prime(x) &= 2ax \\
f\prime\left(\pm\sqrt{-\frac{2}{a}}\right) &= \pm 2\sqrt{-\frac{2}{a}} = \tan 45^\circ = 1 \\
a &= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

2. Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $3x - 4y = 0$

a) Gesucht sind alle Vektoren in der xy-Ebene, welche senkrecht zu g verlaufen und die Länge 20 haben.

$$\begin{aligned} \text{Normalenvektor von g} &: \\ \overrightarrow{n} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ n &= \sqrt{9+16} = 5 \\ \text{Die gesuchten Vektoren sind also 4x so lang wie n und kolinear} &: \\ \overrightarrow{v_1} &= 4\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{v} &= -4\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Gesucht sind die Punkte auf der y-Achse, welche von g den vorgegebenen Abstand d haben .

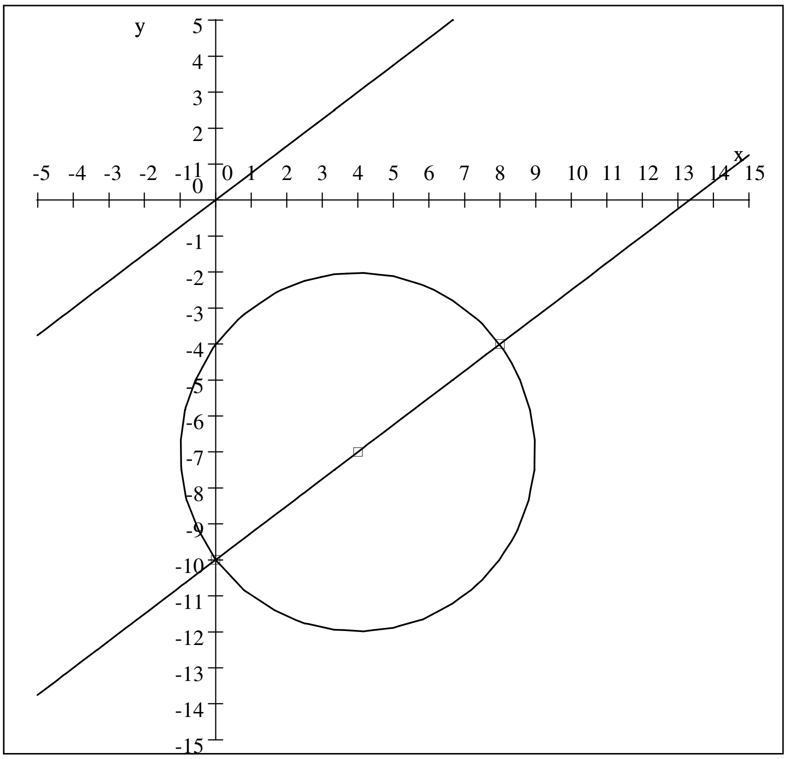
$$\begin{aligned} \text{Hesse-Normalform von g} &: \\ P\,(0|y_0)\ \text{mit Abstand =d :} & \\ y_0 &= \pm\frac{5}{4}d \end{aligned}$$

c) Welche Punkte auf dem Kreis um $M\,(4|-7)$ mit dem Radius 5 haben von g den Abstand 8?

$$\begin{aligned} \text{Abstand M zu g} &: \\ d_M &= 8 \end{aligned}$$

Da M den Abstand 8 von g hat, muss man sich lediglich von M 5 Einheiten kolinear zu g wegbewegen. Also den Richtungsvektor aus a) an den Ortsvektor von M anhängen :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_1} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{r_2} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

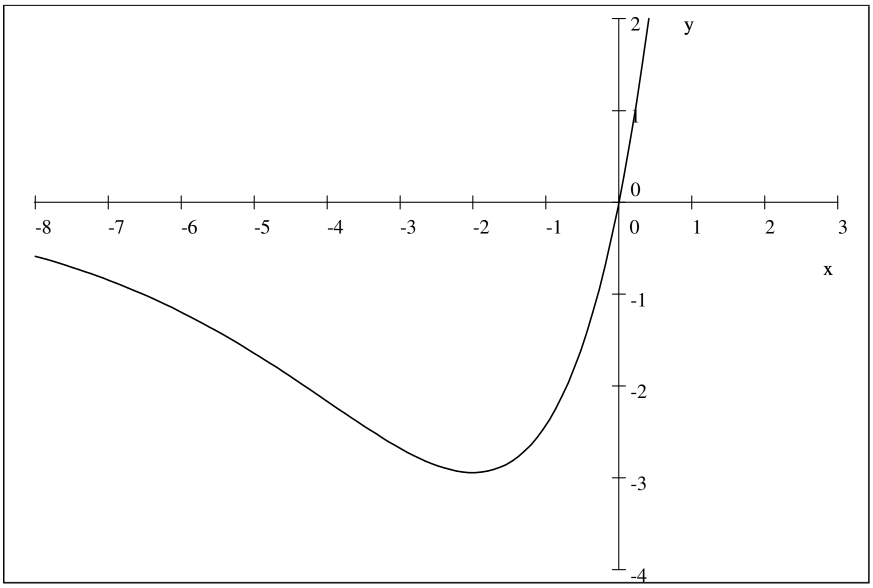


3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = kxe^{0,5x}$

a) Berechnen Sie für den Spezialfall k=4 die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, sowie die Steigung der Tangente von f im Kurvenpunkt P(0,5|y). Skizze.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x &= 0 \\ f\prime(x) &= 0 \\ x &= -2 \\ f\prime\prime(-2) &> 0 \\ Minimum(-2|-8e^{-1}) &\simeq Min(-2|-2,943) \end{aligned}$$

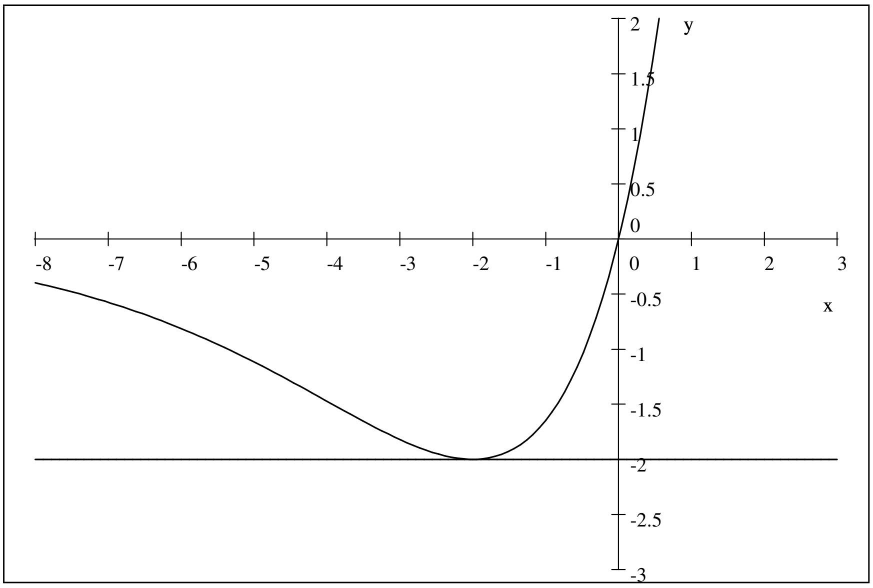
$$\begin{aligned} f\prime\prime(x) &= 0 \\ x &= -4 \\ f\prime\prime\prime(-4) &\neq 0 \\ Wendepunkt(-4|-16e^{-2}) &\simeq WP(-6|-2,165) \\ & \quad P\left(\frac{1}{2}|2e^{\frac{1}{4}}\right) \\ f\prime\left(\frac{1}{2}\right) &= 5e^{\frac{1}{4}} \text{ Steigung der Tangente} \end{aligned}$$



b) Es sei k wieder beliebig. Wie ist k zu wählen, damit der Graf von f die Gerade y=-2 berührt ?

Minimum bei y=-2 :

$$\begin{aligned} x &= -2 \text{ unabhängig von k} \\ f\prime\prime(-2) &> 0 \text{ immer Minimum} \\ f(-2) &= -2 \\ -2ke^{-1} &= -2 \\ k &= e \end{aligned}$$



y
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

4. Eine Person überwacht die drei Maschinen A, B und C. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine A für eine Stunde störungsfrei läuft, ist gleich 0,95. Für B, bzw. C sind es 0.9, bzw. 0,85.

a) Wie gross ist die WS, dass innert einer Stunde genau 2 Maschinen eine Störung haben?

$$\begin{aligned}
\text{WS(A und B haben Störung, C normal)} &= 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.85 = 0.425\% \\
\text{WS(A und C haben Störung, B normal)} &= 0.05 \cdot 0.15 \cdot 0.9 = 0.675\% \\
\text{WS(B und C haben Störung, A normal)} &= 0.95 \cdot 0.1 \cdot 0.15 = 1.425\% \\
\text{WS(genau zwei Maschinen haben eine Störung)} &= 2,525\%
\end{aligned}$$

b) Innert einer Stunde hatte genau eine der drei Maschinen eine Störung. Wie gross ist die WS, dass es die Maschine C war.

$$\begin{aligned}
\text{WS(A hat Störung, B und C normal)} &= 0.05 \cdot 0.9 \cdot 0.85 = 3.825\% \\
\text{WS(B hat Störung, A und C normal)} &= 0.1 \cdot 0.95 \cdot 0.85 = 8.075\% \\
\text{WS(C hat Störung, A und B normal)} &= 0.15 \cdot 0.95 \cdot 0.9 = 12.825\% \\
\text{WS(genau eine Maschine mit Störung)} &= 24.725\% \\
\text{WS(Störung war bei C)} &= \frac{\text{WS(C hat Störung, A und B normal)}}{\text{WS(genau eine Maschine mit Störung)}} = \frac{12.825\%}{24.725\%} = 51,87\%
\end{aligned}$$

c) Wie gross ist die WS, dass innert einer Stunde mindestens eine der drei Maschinen störungsfrei läuft ?

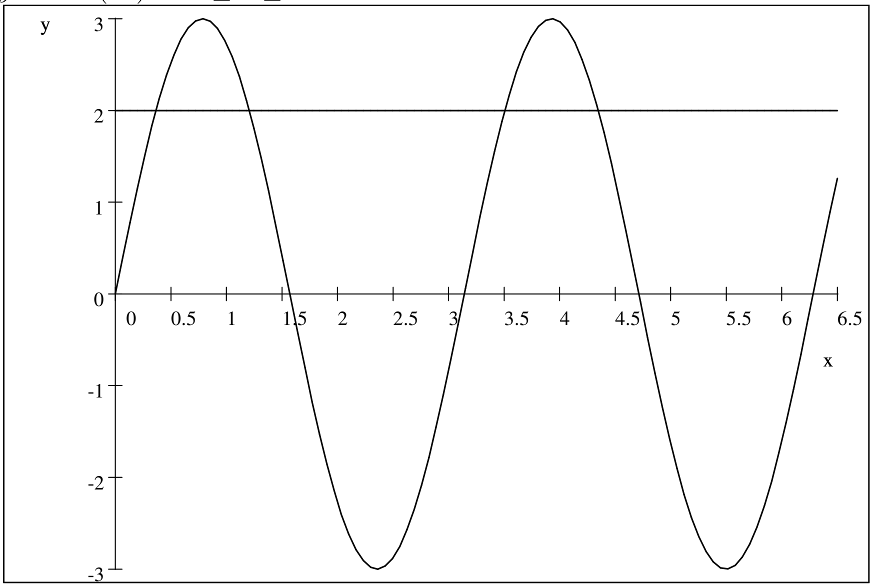
$$\begin{aligned}
\text{WS(mindestens eine störungsfrei)} &= \text{1-WS(keine störungsfrei)} \\
\text{WS(keine störungsfrei)} &= 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.15 = 0,075\% \\
\text{WS(mindestens eine störungsfrei)} &= 99,925\%
\end{aligned}$$

d) Wie viele Stunden muss A laufen, damit die WS dass bei ihr eine Störung eintritt, grösser als 0,99 ist?

$$\begin{aligned}
\text{WS(mindestens eine Störung in n Stunden)} &= 1 - \text{WS(keine Störung in n Stunden)} > 0.99 \\
\text{WS(keine Störung in n Stunden)} &< 0.01 \\
n &\geq 90
\end{aligned}$$

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben

a) Skizzieren Sie die Kurve $y = 3\sin(2x)$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ und berechnen Sie die Schnittwinkel mit der Geraden $y = 2$.



$$\begin{aligned} 3\sin(2x) &= 2 \\ \text{in D} &: \\ L &= \{0,36; 1,21; 3,51; 4,35\} \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie ergeben sich alle Schnittwinkel aus dem ersten (Steigungswinkel des Graphen bei x=0,36)

$$\begin{aligned} f\prime(0,36) &= 4,5108 = \tan\alpha_1 \\ \alpha_1 &= 77,5^\circ = \alpha_3 \\ \alpha_2 &= -77,5^\circ = 102,5^\circ = \alpha_4 \end{aligned}$$

b) Bei einer Verkehrszählung wurde für jedes Auto die Anzahl der im Wagen sitzenden Personen gezählt. Dabei wurden Autos, in welchen mehr als 5 Personen sitzen, nicht erfasst. Die Auszählung ergabe folgendes Resultat :
51 Autos mit 1 Person, 41 mit 2, 36 mit 3, 21 mit 4 und B Autos mit 5 Personen.
Es sei x die Anzahl der Personen in einem Auto. Wie gross ist B, wenn der Mittelwert von x gleich 2,375 ist?

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i n_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i n_i}{\sum\limits_{i=1}^{5} n_i} \\ \overline{x} &= \frac{51 \cdot 1 + 41 \cdot 2 + 36 \cdot 3 + 21 \cdot 4 + B \cdot 5}{51 + 41 + 36 + 21 + B} \\ B &= \frac{149\overline{x} - 325}{5 - \overline{x}} = 11 \end{aligned}$$

c) Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Dreieck ABC mit A(2/3/4), B(4/5/5) und C(-2/5/8) rechtwinklig ist.Die Quadrate der kürzen Seiten ergeben in der Summe das Quadrat der längeren Seite, also ist ABC rechtwinklig, mit dem rechten Winkel bei A.

d) Von einem Rhombus ABCD sind A(2/-2) und C(8/-10) bekannt. Berechnen Sie die Koordinaten von B und D so, dass die

Rhombusfläche 100 beträgt.

$$\begin{aligned}
A_{\text{Rhombus}} &= \frac{1}{2}ef \quad \text{(e,f Diagonalen)} \\
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = e \\
e &= 10 \\
f &= 20 = 2e \\
\text{e und f stehen senkrecht (Komponenten vertauschen, ein Vorzeichen ändern)} &: \quad \overrightarrow{BD} \tilde{} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} \\
\text{f ist doppelt so lang wie e} &: \quad \overrightarrow{BD} = -2\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\text{Von der Mitte aus } \pm\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \text{ gehen, führt zu B und D} &: \\
\overrightarrow{r_M} = & \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_M} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = & \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_D} = \overrightarrow{r_M} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = & \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \quad B(-3|-12) \text{ und } D(13|0)
\end{aligned}$$