

## Mathematik normales Niveau

- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Die Punkteverteilung ist:

Aufgabe	1a	1b	1c	2a	2b	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	5d	5e
Punkte	3	3	4	4	7	4	5	1	2	3	3	3	3	3	3	3

- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
- Für die Note 6 werden höchstens 47 Punkte verlangt.

- 1) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ .
  - a) Berechnen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte. Untersuchen Sie  $f$  auf Symmetrie. Skizzieren Sie damit den Grafen von  $f$ .
  - b) In welchen Punkten auf dem Grafen von  $f$  verläuft die Tangente an den Grafen von  $f$  parallel zur Geraden  $12x - y - 20 = 0$  ?
  - c) Der Graf von  $f$  begrenzt mit der  $x$ -Achse ein Flächenstück. In dieses Flächenstück ist ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einzuschreiben. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.
  
- 2) Gegeben sind die Punkte  $A(-1/1)$  und  $C(5/9)$ .
  - a)  $AC$  sei die Diagonale eines Rechtecks  $ABCD$ , dessen Ecke  $D$  auf der  $y$ -Achse liegt. berechnen Sie die Koordinaten von  $D$  und  $B$ .
  - b) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im I. Quadranten liegt, hat Radius 10 und berührt sowohl die  $x$ -Achse als auch die Gerade  $AC$ . Berechnen Sie die Koordinaten seines Mittelpunktes sowie den Abstand zwischen den beiden Berührungspunkten.
  
- 3) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = e^{-0.5x}$ .
  - a) Wie ist die positive Zahl  $a$  zu wählen, damit der Graf von  $f$  zusammen mit den Koordinatenachsen und der Geraden  $x = a$  ein Flächenstück mit dem Flächeninhalt 1 einschliesst?
  - b) Es sei  $P$  der Schnittpunkt des Grafen von  $f$  mit der  $y$ -Achse und  $t$  die Tangente an den Grafen von  $f$  in  $P$ . Das Quadrat  $OABC$  mit den Ecken  $O(0/0)$ ,  $A(0/2)$ ,  $B(-2/2)$  und  $C(-2/0)$  wird von  $t$  und dem Grafen von  $f$  in drei Flächenstücke aufgeteilt. Berechnen Sie die Inhalte dieser drei Flächenstücke.

- 4) In einer Urne befinden sich folgende Kugeln: 1 Kugel mit der Nummer 1, zwei Kugeln mit den Nummern 2, drei Kugeln mit den Nummern 3 und vier Kugeln mit den Nummern 4.
- a) Bei einem Spiel wird eine Kugel gezogen. Die Nummer der gezogenen Kugel wird als Gewinn ausbezahlt. Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro Spiel.
- b) Es werden mit einem Griff zwei Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der beiden gezogenen Nummern gerade ist?
- c) Es wird so lange eine Kugel gezogen und wieder zurück gelegt, bis zum ersten Mal eine gerade Nummer gezogen wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 Mal gezogen werden muss?
- d) Es werden mit einem Griff 4 Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kugeln mit den Nummern 2 gezogen worden sind?
- 5) Voneinander unabhängige Kurzaufgaben.
- a) Gegeben ist ein regelmässiges 5-Eck mit seinem Umkreis. Wie viele Prozente der Umkreisfläche werden durch das 5-Eck ausgefüllt?
- b) Gegeben ist der Punkt  $B(-2/5)$ . Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A so, dass der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  parallel zur Geraden  $5x - 12y = 0$  verläuft und Länge 39 hat.
- c) Wie ist die Zahl a zu wählen, damit der Extrempunkt der Funktion  $y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$  auf der Geraden  $y = 6$  liegt? Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes.
- d) Gesucht sind alle Zahlenpaare  $(x/y)$  welche die beiden Gleichungen  $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$  und  $\log_{10}(x+y) = 3$  erfüllen.
- e) Gegeben sind die Punkte  $O(0/0/0)$ ,  $A(1/2/2)$ ,  $B(7/5/-4)$  und  $P(5/y/z)$ . Bestimmen Sie y und z so, dass P auf der Geraden AB liegt. Berechnen Sie in diesem Fall den Winkel PAO sowie den Flächeninhalt des Dreiecks PAO.