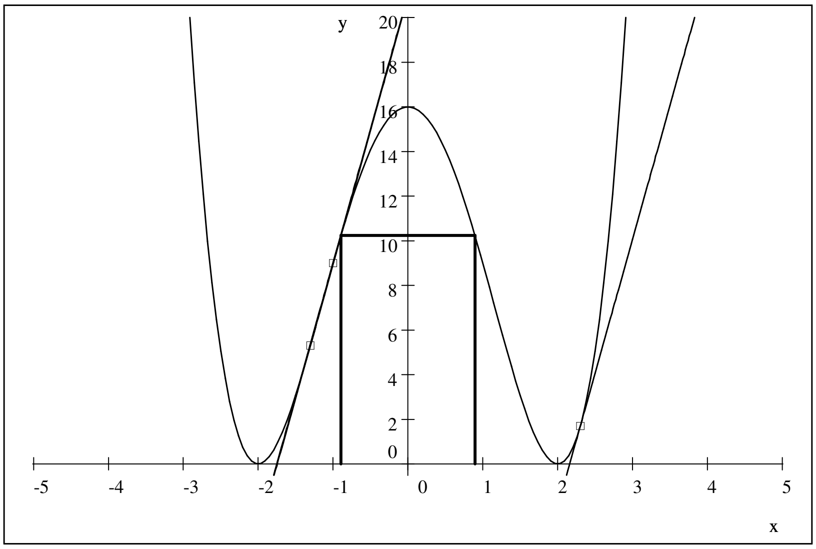
Frühjahr 2009

1. Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte. Untersuchen Sie f auf Symmetrie. Skizzieren Sie damit den Graphen von f.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^2-4\right)^2 = (x-2)^2\,(x+2)^2 \\
\text{Minima bei } (\pm 2|0) &, \quad \text{Maximum bei } (0|16) \\
f\prime(x) &= 4x^3 - 16x = 0 \\
x\left(x^2-4\right) &= 0 \\
x(x-2)\,(x+2) &= 0 \\
x_1 &= 0, y_1 = 16 \\
x_{2/3} &= \pm 2, y_{2/3} = 0
\end{aligned}$$

$f(-x) = f(x)$: Achsenymmetrie zur y-Achse



   b) In welchen Punkten auf dem Grafen von f verläuft die Tangente an den Grafen von f parallel zur Geraden $12x - y - 20 = 0$?

$$\begin{aligned}
12x - y - 20 &= 0 \\
y &= 12x - 20 \\
\text{Steigung : } 12 & \\
f\prime(x) &= 12 \\
4x^3 - 16x &= 12 \\
x_1 &= -1, y_1 = 9 \\
x_{2/3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, y_{2/3} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} = 1.697 \\
x_{2/3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}, y_{2/3} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} = 5.3025
\end{aligned}$$

   c) Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse ein Flächenstück. In dieses Flächenstück ist ein Rechteck mit maximalem

Flächeninhalt einzubeschreiben. Berechnen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks.

$$
\begin{aligned}
A(x) &= 2x \cdot f(x) \quad \text{, o.B.d.A. } x \geq 0 \\
A(x) &= 2x \cdot \left(x^4 - 8x^2 + 16\right) \\
A(x) &= 2\left(x^5 - 8x^3 + 16x\right) \\
A'(x) &= 2\left(5x^4 - 24x^2 + 16\right) = 0 \\
x_{1/2} &= \pm 2 \\
x_{3/4} &= \pm \frac{2}{5}\sqrt{5} \\
A''(x) &= 2\left(20x^3 - 48x\right) \\
A''(2) &> 0 \Rightarrow Minimum(l = 4, h = 0) \\
A''\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right) &< 0 \Rightarrow Maximum\left(l = \frac{4}{5}\sqrt{5}, h = \frac{256}{25}\right)
\end{aligned}
$$

2. Gegeben sind die Punkte A(-1/1) und C(5/9).

a) AC sei die Diagonale eines Rechtecks ABCD, dessen Ecke D auf der y-Achse liegt. Berechnen Sie die Koordinaten von D und B.

$$\begin{aligned}
D(0 &\;/\; y) \\
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 0+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-5 \\ y-9 \end{pmatrix} &= 0 \\
-5 + (y-1)(y-9) &= 0 \\
y_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{21}
\end{aligned}$$

y_1 ergibt den richtigen Umlaufsinn

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DC} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4-\sqrt{21} \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{DC} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5-\sqrt{21} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im I. Quadranten liegt, hat den Radius 10 und berührt sowohl die x-Achse, als auch die Gerade AC. Berechnen Sie die Koordinaten seines Mittelpunktes, sowie den Abstand zwischen den beiden Berührpunkten. N : Nullstelle der Gerade g, X : Berührpunkt Kreis mit x-Achse, T : Berührpunkt mit Gerade.

$$\begin{aligned}
\text{Steigung AC :} \quad & \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\
g \quad : \quad & y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3} = 0 \\
& N\left(-\frac{7}{4}\middle|\,0\right) \\
\text{Steigungswinkel } \alpha \quad = \quad & \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13^\circ \\
\alpha/2 \quad = \quad & 26.565^\circ \\
\tan(\alpha/2) \quad = \quad & \frac{MX}{NX} = \frac{R}{NX} = \frac{10}{NX} \\
NX \quad = \quad & \frac{10}{\tan(\alpha/2)} = 20 \\
& X\left(\frac{73}{4}\middle|\,0\right) \\
& M\left(\frac{73}{4}\middle|\,10\right) \\
\measuredangle MXT \quad = \quad & \alpha/2 \\
XT \quad = \quad & 2 \cdot XM \cdot \cos(\alpha/2) \\
XT \quad = \quad & 2 \cdot R \cdot \cos(\alpha/2) = 17.89
\end{aligned}$$

3. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^{-0.5x}$

a) Wie ist die positive Zahl a zu wählen, damit der Graph von f zusammenmit den Koordinatenachsen un der Geraden x=a ein Flächenstück mit dem Flächeninhalt 1 einschliesst ?

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)dx &= 1 \\
\int_0^a e^{-0.5x}dx &= 1 \\
\left[-2e^{-0.5x}\right]_0^a &= 1 \\
2 - 2e^{-0.5a} &= 1 \\
a &= 2\ln(2)
\end{aligned}$$

b) Es sei P der Schnittpunktkt des Grafen von f mit der y-Achse und t die Tangente an den Grafen von f in P. Das Quadrat OBCD mit den Ecken O(0/0), A(0/2), B(-2/2) und C(-2/0) wird von t und dem Grafen von f in drei Flächenstücke geteilt. Berechnen Sie den Inhalt dieser Flächenstücke.

f schneidet die y-Achse in y=1.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -0.5e^{-0.5x} \\
f'(0) &= -\frac{1}{2} \\
t &: \; y = -\frac{1}{2}x + 1
\end{aligned}$$

t schneidet das Quadrat bei B und teilt somit eine untere Fläche $A_1 = 3$ ab.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2 \\
e^{-0.5x} &= 2 \\
x &= -2\ln 2 \\
A_2 &= \int_{-2\ln 2}^{0} (2 - f(x))\, dx \\
A_2 &= \left[2x + 2e^{-0.5x}\right]_{-2\ln 2}^{0} \\
A_2 &= 4\ln 2 - 2 = 0.773 \\
A_3 &= 4 - A_1 - A_2 = 3 - 4\ln 2 = 0.227
\end{aligned}$$

4. In einer Urne befinden sich folgende Kugeln : 1 Kugel mit der Nummer 1, zwei Kugeln mit der Nummer 2, drei Kugeln mit der Nummer 3 und vier Kugeln mit der Nummer 4.

a) Bei einem Spiel wird eine Kugel gezogen. Die Nummer der gezogenen Kugel wird als Gewinn ausbezahlt. Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro Spiel.

$$\begin{aligned} G &= p_1 \cdot g_1 + p_2 \cdot g_2 + p_3 \cdot g_3 + p_4 \cdot g_4 \\ G &= \frac{1}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 2 + \frac{3}{10} \cdot 3 + \frac{4}{10} \cdot 4 \\ G &= 3 \end{aligned}$$

b) Es werden mit einem Griff zwei Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der beiden gezogenen Kugeln gerade ist ?

$$\begin{aligned} WS &= P(gerade) + P(ungerade, gerade) \\ WS &= \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \\ WS &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$

c) Es wird so lange eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt, bis zum ersten Mal eine gerade Nummer gezogen wird. Wie gross ist die WS, dass mindestens 3 Mal gezogen werden muss ?

$$\begin{aligned} WS(\text{mindestens 3 Mal}) &= 1 - WS(\text{weniger als 3 Mal}) \\ WS &= 1 - WS(\text{1 Mal})\text{-}WS(\text{zwei Mal}) \\ WS &= 1 - \frac{6}{10} - \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \\ WS &= \frac{4}{25} \end{aligned}$$

d) Es werden mit einem Griff 4 Kugeln gezogen. Wie gross ist die WS, dass alle Kugeln mit den Nummern 2 gezogen worden sind ?

$$\begin{aligned} WS &= P(22xx) + P(2x2x) + P(2xx2) + P(x22x) + P(x2x2) + P(xx22) \\ WS &= 6 \cdot \frac{2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} \\ WS &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben.
   a) Gegeben ist ein regelmässiges 5-Eck mit seinem Umkreis. Wie viel Prozent der Umkreisfläche werden durch das 5-Eck ausgefüllt ?

$$v = \frac{A_5}{A_K} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha}{r^2 \cdot \pi}$$
$$v = \frac{5 \cdot r^2 \cdot \sin 72°}{2 \cdot r^2 \cdot \pi}$$
$$v = \frac{5 \cdot \sin 72°}{2 \cdot \pi} = 0.76 = 76\%$$

   b) Gegeben ist der Punkt B(-2/5). Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A so, dass der Vektor $\overrightarrow{AB}$ parallel zu der Geraden 5x-12y=0 verläuft und die Länge 39 hat.

Normalenvektor der Geraden : $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

$$n = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$
$$\overrightarrow{AB} = \frac{39}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 15 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{r_{A_{1/2}}} = \overrightarrow{r_B} \pm \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{r_{A_{1/2}}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 36 \\ 15 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{r_{A_1}} = \begin{pmatrix} 34 \\ 20 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{r_{A_2}} = \begin{pmatrix} -38 \\ -10 \end{pmatrix}$$

   c) Wie ist die Zahl a zu wählen , damit der Extremalpunkt der Funktion $y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ auf der Geraden $y = 6$ liegt ? Berechnen Sie die Koordinaten des Extremalpunktes.

$$y = \sqrt{x} + a \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{a}{2\sqrt{x^3}} = 0$$
$$x = \pm a$$
$$x = -a \text{ und } a < 0 : y = 0$$
$$x = a \text{ und } a > 0 : y = 2\sqrt{a}$$
$$2\sqrt{a} = 6$$
$$a = 9$$
$$E(9/6)$$

   d) Gesucht sind alle Zahlenpaare (x/y) welche die beiden Gleichungen $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$ und $\log_{10}(x+y) = 3$ erfüllen.

$$\log_{10} x - \log_{10} y = 2$$
$$\log_{10} \frac{x}{y} = 2$$
$$I. \frac{x}{y} = 100$$
$$x = 100y$$
$$\log_{10}(x+y) = 3$$
$$II. x + y = 1000$$
$$I. \text{ in } II.$$
$$100y + y = 1000$$
$$y = \frac{1000}{101}$$
$$x = \frac{100000}{101}$$

e) Gegeben sind die Punkte O(0/0/0), A(1/2/2), B(7/5/-4) und P(5/y/z).
Bestimmen Sie y und z so, dass P auf der Geraden AB liegt. Berechnen Sie in diesem Fall den Winkel PAO, sowie den Flächeninhalt des Dreiecks PAO.

$$\begin{aligned}
g_{AB} &: \quad \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{r_P} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
I &: \quad 1 + 6\lambda = 5 \\
II &: \quad 2 + 3\lambda = y \\
III &: \quad 2 - 6\lambda = z \\
\lambda &= \quad \frac{2}{3}, y = 4, z = -2 \\
& \quad P(5/4/-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \\
AP &= 6, AO = 3 \\
\cos\alpha &= \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}{6 \cdot 3} \\
\cos\alpha &= 0 \\
\alpha &= 90^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{PAO} &= \frac{1}{2} AO \cdot AP \\
A_{PAO} &= 9
\end{aligned}$$