

**Mathematik, Normales Niveau (4 Stunden)**

- Bei jeder Aufgabe soll mit einem neuen Blatt begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $\pi$ ,  $e$ , etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Die Punkteverteilung ist:

Aufgabe	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	5d
Punkte	2	6	3	3	4	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3

- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind alle Herleitungen vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
- Die maximale Punktzahl beträgt 50 Punkte. Für die Maximalnote 6 werden höchstens 42 Punkte verlangt.

- 1) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^3 - ax^2$ ,  $a > 0$  konstant.
  - a) Skizzieren Sie für den Spezialfall  $a = 2$  den Grafen von  $f$  mit Hilfe der Nullstellen und lokalen Extrempunkte.
  - b) Es sei  $a$  wieder eine beliebige positive Konstante.
    - 1) Der Inhalt des Flächenstücks, welches vom Grafen von  $f$  und der  $x$ -Achse begrenzt ist, sei 108. Berechnen Sie  $a$ .
    - 2) Wie ist  $a$  zu wählen, damit der Wendepunkt der Funktion  $f$  unterhalb der Geraden  $y = -2$  liegt?
- 2) Gegeben sind der Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $M(11 / -3)$  und Radius 5 sowie der Punkt  $P(0 / -1)$ .
  - a) Von  $P$  aus werden die Tangenten an  $k$  gelegt. Berechnen Sie die Länge der Tangentenabschnitte sowie den spitzen Schnittwinkel der beiden Tangenten.
  - b) Ein Kreis mit Radius 4 soll die  $y$ -Achse und den Kreis  $k$  berühren. Berechnen Sie die Koordinaten seines Mittelpunktes.
  - c) Welche Parallelen zur Geraden  $PM$  schneiden aus  $k$  ein Sehnenstück der Länge  $4\sqrt{5}$  heraus?
- 3) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = e^{0.5x}$ .
  - a) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches vom Grafen von  $f$ , der  $y$ -Achse und der Geraden  $y = 2$  begrenzt ist.
  - b) Welcher Punkt auf dem Grafen von  $f$  liegt am nächsten bei der Geraden  $x - 4y - 4 = 0$ ? Wie gross ist dessen Abstand zur Geraden?
  - c) Eine Gerade durch  $O(0/0)$  berührt den Grafen von  $f$ . Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes sowie die Gleichung dieser Geraden.

4) In einer Urne hat es eine Kugel mit der Nummer 1, drei Kugeln mit der Nummer 3, fünf Kugeln mit der Nummer 5 und sieben Kugeln mit der Nummer 7.

a) Sie nehmen mit einem Griff 2 Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Nummern gleich 8 ist?

b) Sie nehmen so lange eine Kugel (ohne Zurücklegen), bis zum ersten Mal eine Kugel mit der Nummer 7 genommen wird. Es sei  $X$  die Anzahl der benötigten Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass  $X \leq 3$  ist.

c) Sie nehmen nacheinander viermal eine Kugel, notieren sich die Nummer und legen sie zurück. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau zweimal eine 5 und zweimal eine 7 genommen haben?

d) Sie ziehen sechzigmal nacheinander eine Kugel, notieren sich die Nummer und legen sie zurück. So ergibt sich folgende Verteilung:

Nummer N	1	3	5	7
Anzahl Ziehungen mit Nummer N	4	11	19	26

Berechnen Sie für diese Verteilung den Mittelwert und die Standardabweichung von N.

5) Voneinander unabhängige Kurzaufgaben

a) Wie oft müssen Sie mit 3 Würfeln würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal drei gleiche Zahlen zu werfen, grösser als 0.99 ist?

b) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = 3\cos(2x)$ , mit  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Skizzieren Sie den Grafen von  $f$ . Der Graf von  $f$  begrenzt mit den positiven Koordinatenachsen bis zu seiner ersten positiven Nullstelle ein Flächenstück A. Welche Parallele zur y-Achse teilt A in zwei flächengleiche Teile?

c) Gegeben sind die Punkte  $A(1/4)$ ,  $B(9/-2)$  und  $C(6/-8)$ . Gesucht sind die Komponenten eines Vektors, welcher senkrecht auf  $\overline{AB}$  steht und doppelt so lang ist wie  $\overline{AC}$ .

d) Gegeben sind die Parabel  $y = \frac{1}{3}x^2$  sowie der Punkt  $P(0/4)$ . Eine zur x-Achse parallele Parabelsehne, welche unterhalb des Punktes P liegt, bildet zusammen mit dem Punkt P ein gleichschenkliges Dreieck. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt dieses Dreiecks.