Schweizerische Maturitätsprüfungen
Winter 2015, Zürich

Gruppe/Nummer ....
Name/Vorname ....

Mathematik normales Niveau

- Bei jeder Aufgabe soll mit einem neuen Blatt begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π, e, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Die Punkteverteilung ist:

Aufgabe	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	5d
Punkte	4	3	3	4	2	3	4	2	3	1	3	3	3	3	3	3	3

- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind alle Herleitungen vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
- Die maximale Punktzahl beträgt 50 Punkte. Für die Maximalnote 6 werden höchstens 42 Punkte verlangt.

1) Gegeben sind die Kurven f und g mit den Gleichungen $f(x) = -x^3 + x$ und $g(x) = x^2 + ax$; a ist eine reelle Konstante.
a) Es sei $a = -1$. Berechnen Sie die Koordinaten der Nullstellen und Extremalpunke von f und g. Skizzieren Sie die Kurven und berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, welches die Kurven im I. und IV. Quadranten miteinander einschliessen.
b) Berechnen Sie den stumpfen Schnittwinkel von f mit der Geraden $x-2y-14 = 0$.
c) Nun sei a wieder eine beliebige reelle Konstante. Bestimmen Sie a so, dass der Kreis mit der Gleichung $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 20$ die Kurve g im Punkt O(0/0) berührt.

2) Gegeben sind der Punkt Z(0/13) sowie der Kreis k mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 26$.
a) Die Gerade mit der Gleichung $y = x + 13$ wird um den Punkt Z im Uhrzeigersinn gedreht, bis die gedrehte Gerade jeweils den Kreis k berührt. Bestimmen Sie die Berührungspunkte und die Drehwinkel.
b) Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ teilt den Umfang von k in 2 Teile, welche sich wie 3:1 verhalten. Berechnen Sie c.
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von k mit der Parabel $y = -5x^2$.

3) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = xe^x$; e ist die Eulersche Zahl.
a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremalpunkte, Wendepunkte und Asymptoten von f. Skizzieren Sie damit die Kurve.
b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: P(0/0) ist derjenige Punkt auf f, welcher von der Geraden $x - y - 13 = 0$ den kleinsten Abstand hat.
c) Bestimmen Sie k so, dass die Funktion $y = (x + k)e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, welches von f, der positiven x-Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird.

4) Qualitätsprüfungen in einer Glühlampenfabrik haben ergeben, dass im Durchschnitt eine von 500 Glühlampen defekt ist. Die Fabrik verkauft die Glühlampen in Packungen von 20 Stück.
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung alle Glühlampen intakt sind?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in 3 Packungen insgesamt genau eine defekte Glühlampe hat?
c) Falls es in einer Packung mindestens zwei defekte Glühlampen hat, darf die Packung zurück gegeben werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde eine gekaufte Packung zurückgeben darf?
d) Ab wie vielen Glühlampen ist die Wahrscheinlichkeit, dass es darunter mindestens eine defekte Glühlampe hat, grösser als 0.4?

5) Voneinander unabhängige Kurzaufgaben

a) Gegeben sind die Punkte A(2/0/0) und B(0/1/0). Bestimmen Sie die Punkte C auf der z-Achse so, dass der Winkel CAB gleich 60° ist.

b) P(0/-1) ist ein Hochpunkt der Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 3}$.
Berechnen Sie a und b.

c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \sin(bx)$, $a>0$, $b>0$. Berechnen Sie a und b, wenn aufeinanderfolgende Nullstellen von f voneinander Abstand $\frac{\pi}{4}$ haben und die y-Achse von f unter einem Winkel von 30° geschnitten wird.

d) Bei einer Prüfungsauswertung ergaben sich folgende Resultate: 25% aller Personen hatten eine gute Lateinnote, 30% hatten eine gute Deutschnote und 10% hatten sowohl eine gute Latein- als auch eine gute Deutschnote. Es wird eine Person zufällig ausgewählt. Sie hat keine gute Lateinnote. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine gute Deutschnote hat?