Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Zürich und Basel, Winter 2020

MATHEMATIK, Normales Niveau

Kand.-Nr.:

Name, Vorname:

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Visum Korrigierende(r): ....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf normalem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**37 Punkte**
Autoren:	Urs Allenspach, in Zusammenarbeit mit Hans Aeppli
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Schweizerische Maturitätsprüfung
Winter 2020

Gruppe/Nummer ....
Name/Vorname ....

Mathematik normales Niveau

- Die Prüfungszeit beträgt 4 Stunden.
- Bei jeder Aufgabe soll mit einem neuen Blatt begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Die Punkteverteilung lautet:

Aufgabe	1a	1b	1c	1d	1e	1f	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b	3c	3d	3e	4a	4b	4c	4d	4e
Punkte	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	3	1	2	5	2	2	2	2

- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind alle Herleitungen vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
- Die maximale Punktzahl beträgt 37 Punkte. Für die Maximalnote 6 werden höchstens 33 Punkte verlangt.

1) Gegeben ist die Kurve f mit der Gleichung
$$f(x) = \sqrt{a(x-a)}$$
wobei $a > 0$ eine unbekannte Konstante ist.
a) Berechnen Sie die Nullstelle von f.
b) Zeichnen Sie den Graphen von f für $a = 4$ im Intervall $[-2, 12]$ in ein Koordinatensystem ein.
c) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Tangente an den Punkt $P(8, y)$ von f für $a = 4$ durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ gegeben ist.
d) Weisen Sie nach, dass $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{a(x-a)^3}$ eine Stammfunktion der ursprünglichen Funktion f ist.
e) Wie gross ist die Fläche A, die vom Graphen von f für $a = 4$ und obiger Tangente im Intervall $[4, 11]$ eingeschlossen wird?
f) Bestimmen Sie die Tangente t im Graphenpunkt $Q(2a, y)$ von f.

2) Anlässlich einer Umfrage unter 750 Personen geben 225 der Befragten an, im Jahr 2019 eine Flugreise unternommen zu haben.
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 Personen mindestens 1 Person geflogen ist?
Von den übrigen 525 Personen sind 40% Vegetarier. Insgesamt sind 68% der Befragten keine Vegetarier. Eine der befragten Personen werde nun zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
b) sie 2019 eine Flugreise unternahm und zu den Vegetariern gehört?
c) sie 2019 eine Flugreise unternahm, falls sie zu den Vegetariern gehört?
d) sie 2019 eine Flugreise unternahm oder zu den Vegetariern gehört?
e) sie 2019 eine Flugreise unternahm und zu den Vegetariern gehört oder beides nicht der Fall ist?

3) Gegeben sind die zwei Punkte $P(14/10)$ und $Q(5/-2)$.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade g mit der Gleichung

$$\binom{x}{y} = \binom{11}{6} + \lambda \binom{3}{4}$$

durch die beiden Punkte verläuft.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden g, die doppelt so weit von Q entfernt liegen wie von P.

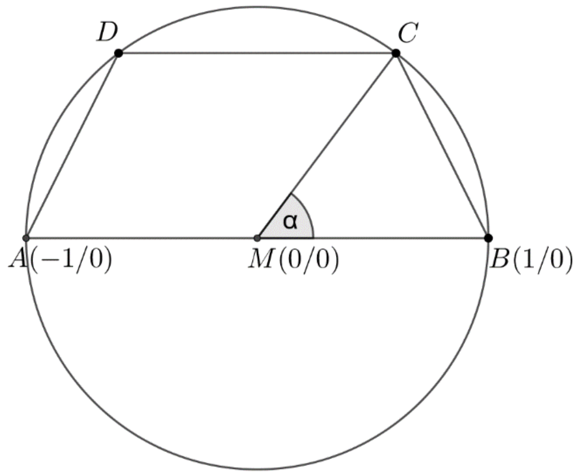
c) Leiten Sie rechnerisch her, dass die Menge aller Punkte, die von Q doppelt so weit entfernt sind wie von P, den Umfang des Kreises k mit Mittelpunkt $M(17/14)$ und Radius $r = 10$ bildet.

d) Wie viele Kreise gibt es, die beide Koordinatenachsen und den Kreis k aus Teilaufgabe c) berühren? Erstellen Sie dazu eine Skizze.

e) Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius des kleinsten dieser Kreise.

4) Vermischte Aufgaben

a) Die Eckpunkte $A(-1/0)$, $B(1/0)$, C und D eines gleichschenkligen Trapezes liegen auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt $M = (0/0)$ und Radius $r = 1$. Der Winkel α bezeichne den Winkel $\angle BMC$ (vgl. Darstellung, rechts).



i) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes für $\alpha = 50°$.

ii) Zeigen Sie rechnerisch, dass für den Umfang U des Trapezes gilt:

$$U(\alpha) = 2 + 2\cos(\alpha) + 2\sqrt{2 - 2\cos(\alpha)}$$

iii) Für welchen Winkel α hat das Trapez den grössten Umfang?

b) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral

$$\int_1^2 |2x - 3| \mathrm{d}x$$

c) Gegeben sei der Graph folgender Funktion:

$$y = e^{2x}$$

Welche zur x-Achse parallele Gerade schneidet diesen Graphen in einem Winkel von 30°?

d) Welche Polynomfunktion vierten Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der x-Achse als Wendetangente und in $P(-1/-2)$ ein Minimum?

e) Welche Tangenten an den Kreis k: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ verlaufen parallel zur Geraden g: $4x + 3y - 7 = 0$?