Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
**Schweizerische Maturitätskommission SMK**

**Schweizerische Maturitätsprüfung** Zürich und Pfäffikon SZ, Winter 2023

# MATHEMATIK, Normales Niveau

**Kand.-Nr.:**

**Name, Vorname:**

Erreichte Punktzahl: ............................

Note: ............................

Visum Korrigierende(r): ............................

| | |
|---|---|
| Fach: | **Mathematik, Normales Niveau** |
| Dauer: | **4 Stunden** |
| Zugelassene Hilfsmittel: | Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK |
| Maximale Punktzahl: | **55 Punkte** |
| Autoren: | Meriton Mihovci, in Zusammenarbeit mit Urs Allenspach |

Fachspezifische Anweisungen:

1. Bei jeder Aufgabe soll mit einem neuen Blatt begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
2. Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, $e$, etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
3. Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind alle Herleitungen nachvollziehbar darzustellen.
4. Für die Maximalnote 6 werden höchstens 50 Punkte verlangt.

**Aufgabe 1** (10 Punkte) **Kreis, Geraden, Tangenten**

Gegeben sei der Kreis $k:\quad x^2+y^2-6x-8y+16=0.$

a) *(3 P)* Bestimmen Sie Mittelpunkt $M$ und Radius $r$ des Kreises $k$. Skizzieren Sie anschliessend den Kreis.

b) *(2 P)* Überprüfen Sie, ob die Punkte $P(3|7)$ und $Q(4|6)$ auf dem Kreis $k$ liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade $g$ durch $P$ und $Q$.

c) *(5 P)* Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Kreis $k$, die parallel zur Gerade $g$ verlaufen.

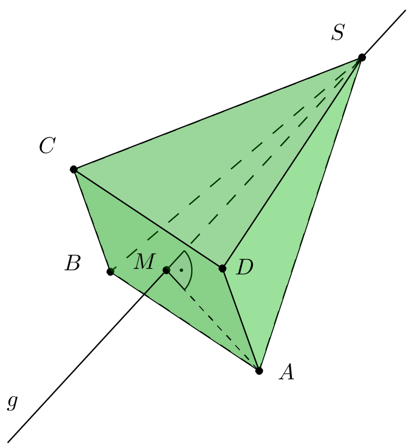
**Aufgabe 2** (11 Punkte) **Vektorgeometrie**

Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche sind die Spitze $S(3|-2|9)$, der Punkt $A(4|5|2)$ und die Richtung $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ der Symmetrieachse $g$ gegeben.

a) *(1 P)* Bestimmen Sie die Parametergleichung der Symmetrieachse $g$.

b) *(1 P)* Berechnen Sie den Winkel zwischen der Gerade $g$ und der Kante $AS$.

c) *(2 P)* Berechnen Sie den Mittelpunkt $M$ der Pyramidengrundfläche.




Sei $f$ eine weitere Gerade mit der Parametergleichung: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$

d) *(2 P)* Diskutieren Sie die gegenseitige Lage der Geraden $g$ und $f$ und bestimmen Sie – falls vorhanden – den Schnittpunkt.

e) *(2 P)* Der Punkt $D$ der Pyramidengrundfläche liegt auf der Geraden $f$ und hat den Abstand $6$ zum Punkt $A$. Bestimmen Sie den Punkt $D$.

f) *(1 P)* Bestimmen Sie die fehlenden Punkte $B$ und $C$ der Pyramidengrundfläche.

g) *(2 P)* Geben Sie die Parametergleichung der Ebene $\Omega$ an, die die Seitenfläche $ASD$ enthält. Liegt der Punkt $P(-2|-1|-1)$ in der Ebene $\Omega$?

**Aufgabe 3** (11 Punkte) **Stochastik**

Rea hat in ihrer Weihnachtsguetzlibox 27 Mailänderli, davon 9 Stück herzförmig.

a) *(5.5 P)*

$a_1$) *(0.5 P)* Aus der Box wird zufällig ein Mailänderli gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Mailänderli herzförmig ist?

$a_2$) *(1 P)* Aus der Box werden zufällig zwei Mailänderli gegessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gegessenen Mailänderli beide herzförmig waren?

$a_3$) *(4 P)* Aus der Box werden zufällig 5 Mailänderli gegessen.

i) *(2 P)* Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Mailänderli davon herzförmig war?

ii) *(2 P)* Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mailänderli davon herzförmig waren?

Die Guetzlibox von Rea wird weiter untersucht. Von den 27 Mailänderli sind 9 herzförmig, 7 sternförmig, 5 rund und die restlichen 6 viereckig.

b) *(2 P)* Aus der Box werden zufällig drei Mailänderli gegessen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser drei Mailänderli die gleiche Form haben?

c) *(3.5 P)* Nun kommt die Guetzlibox von Jon – Reas kleinem Bruder – ins Spiel. Die Guetzlibox von Jon enthält 25 Mailänderli, davon 6 herzförmige. Rea und Jon entscheiden sich, ihre Guetzli in einer gemeinsamen grösseren Box zu vereinigen.

$c_1$) *(0.5 P)* Aus der gemeinsamen Box wird zufällig ein Mailänderli gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Mailänderli aus der Box von Rea stammt?

$c_2$) *(1.5 P)* Aus der gemeinsamen Box wird zufällig ein Mailänderli gezogen. Dieses Mailänderli ist herzförmig. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses herzförmige Mailänderli aus der Guetzlibox von Rea stammt?

$c_3$) *(1.5 P)* Die Wahrscheinlichkeit, dass man ein sternförmiges Mailänderli zieht, beträgt $\frac{4}{13}$. Wie viele sternförmige Mailänderli enthält die Guezlibox von Jon?

**Aufgabe 4** (8 Punkte) **Analysis, Integralrechnung**

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 + 4$ und $g(x) = \frac{1}{9} \cdot (x-3)^2$.

a) *(2 P)* Skizzieren Sie die Graphen der zwei gegebenen Funktionen.

b) *(1 P)* Berechnen Sie die Schnittstellen der zwei Funktionen.

c) *(3 P)* Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ der zwei Funktionen.

d) *(2 P)* Berechnen Sie die Fläche, die von den zwei Funktionsgraphen eingeschlossen wird.

**Aufgabe 5** (7 Punkte) **Analysis, Differentialrechnung**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x}$.

a) *(0.5 P)* Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f$.

b) *(1.5 P)* Wir betrachten Rechtecke mit den Eckpunkten $(0|0)$, $(x|0)$, $\left(x\middle|f(x)\right)$, und $\left(0\middle|f(x)\right)$ für reelle $x > 0$. Zeichnen Sie ein Beispiel eines solchen Rechtecks ein und stellen Sie eine Funktion $A(x)$ auf, die den Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von $x$ beschreibt.

c) *(3 P)* Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion $A(x)$.
**Bemerkung**: Falls Sie Teilaufgabe b) nicht gelöst haben, und nur dann, dürfen Sie in der folgenden Teilaufgabe mit der Funktionsgleichung $A(x) = 2x \cdot e^{-x} + 1$ weiterrechnen.

d) *(2 P)* Für welchen $x$-Wert wird der Flächeninhalt des Rechtecks maximal?

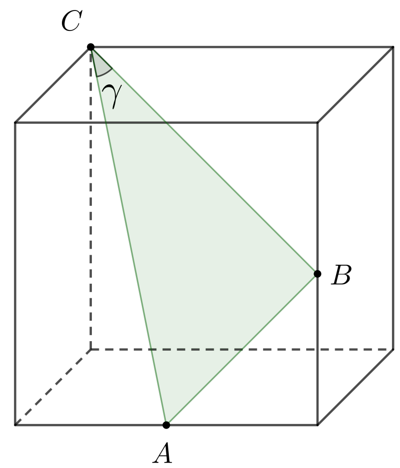
**Aufgabe 6** (8 Punkte) **Voneinander unabhängige Aufgaben**

a) *(3 P)* Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{4x^2}$ an der Stelle $x = 1$.

b) *(3 P)* Von der Gleichung

$$x^3 - \frac{17}{6}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$

kennt man eine Lösung $x_1 = 2$. Bestimmen Sie die restlichen reellen Lösungen.




c) *(2 P)* Das Dreieck $ABC$ ist einem Würfel mit Kantenlänge $s = 6$ einbeschrieben (vgl. Abbildung nebenan); $A$ und $B$ sind Kantenmitten. Berechnen Sie den Winkel $\gamma$.