WINTER 2023 Mathematik

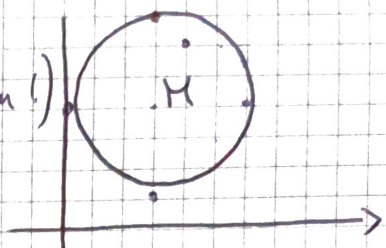
1) a) $K: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$

$y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$

$x^2 - 6x \xrightarrow{\text{Ergänzung}} x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

$K: (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 3^2$



Oder mit der Formel (Fundamentum!)

$M = \left(-\frac{a}{2} \middle| -\frac{b}{2}\right)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ Mit $a = -6$ | $b = -8$ $c = 16$

b) Punkt auf Objekt <-> Koordinaten erfüllen Gleichung

$P: 3^2 + 7^2 - 6 \cdot 3 - 8 \cdot 7 + 16 = 0 \rightarrow P \in K$

$Q: 4^2 + 6^2 - 6 \cdot 4 - 8 \cdot 6 + 16 = -4 < 0 \rightarrow$ P ist im Inneren

Gerade:

als lineare Funktion

$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{6-7}{4-3} = -1$

Punkt-Steigungsform

$y = -1(x-3) + 7$

$y = -x + 10$

Parameterform

$\overrightarrow{PQ} = \text{"}Q - P\text{"} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{r} = \vec{r}_P + s\,\overrightarrow{PQ}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Ansatz

$y = mx + q$

Parallel $\rightarrow m = -1$

Ansatz

$\vec{r} = \vec{r}_B + t\vec{v}$

Parallel $\rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Algebraische Lösung: Eine Tangente hat einen gemeinsamen Punkt mit dem Kreis

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-8y+16=0 \\ y=-x+q \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} &x^2+(-x+q)^2-6x-8(-x+q)+16=0 \\ &2x^2+(2-2q)x+q^2-8q+16=0 \end{aligned}$$

Nur eine Lösung $\Leftrightarrow D=0 \Leftrightarrow (2-2q)^2-4\cdot 2\cdot(q^2-8q+16)=0$

$$-4q^2+56q-128=0 \rightarrow q_1=7+3\sqrt{2}$$
$$q_2=7-3\sqrt{2}$$

$t_1: \; y=-x+7+3\sqrt{2}$

$t_2: \; y=-x+7-3\sqrt{2}$

Axiomatische Lösung: Die Tangente ist r Einheiten entfernt von M

Ansatz: $y=-x+q$ (siehe oben)

$\rightarrow$ Hessesche Form mit $r=3$ $\quad \left|\frac{x+y-q}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|=3 \quad$ x_M und y_M einsetzen

$$\left|\frac{3+4-q}{\sqrt{2}}\right|=3 \rightarrow q=7\pm 3\sqrt{2}$$

t_1 und t_2 wie oben

Konstruktive Lösung

Ohne Vektoren

$\ell \perp g$ durch M $\quad m_\ell=-\frac{1}{m_g}$

$\ell: y=1(x-3)+4=x+1$

$\ell \cap k \rightarrow B_1=\left(3+\frac{3\sqrt{2}}{2} \,\middle|\, 4+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$B_2=\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2} \,\middle|\, 4-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Formel für die Kreistangente

$\rightarrow t_1, t_2$ wie oben

Konstruktive Lösung mit Vektoren

$\vec{v}=\vec{PQ}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\perp\vec{v}$.

$B_{1,2}=M\pm r\frac{\vec{n}}{|n|}$

$=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\pm 3\frac{\sqrt{2}}{2}\\4\pm 3\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$t_1: \vec{r}=\vec{r}_{B_1}+s\vec{v}$

$t_2: \vec{r}=\vec{r}_{B_2}+s\vec{v}$

Analytische Lösung: Kreis als Funktionsgraph.

$$K(\cancel{x}) = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(y^2-8y+16)}}{2} = 3 \pm \sqrt{-y^2+8y-7}$$

$$K'(\cancel{x}) = \frac{\pm(-2y+8)}{2\sqrt{-y^2+8y-7}} = 1 \quad (= m_g)$$

$$(-2y+8)^2 = 4(-y^2+8y-7)$$

$$8y^2 - 64y + 92 = 0 \quad \to y_{1,2} = 4 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

t_1, t_2 wie oben

---

2) a) $g: \vec{r} = \vec{r}_S + s\vec{v}$ $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{SA} = \text{"}A - S\text{"} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen Geraden = Winkel zwischen Richtungsvektoren

$$\cos\varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{SA}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{SA}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}}{3 \cdot 3\sqrt{11}} = \frac{-27}{9\sqrt{11}} \to \varphi \approx 154{,}76°$$

c) M ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene ABCD

Aus A und $\vec{v}$ kann man die Ebene konstruieren:

$$E: \vec{v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0 \quad \to E: x - 2y + 2z = -2$$

$$g \cap E \to M = (0|4|3)$$

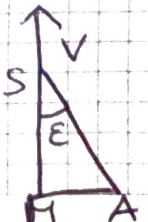
ODER mit Trigonometrie

$SM = SA \cdot \cos\varepsilon$

$\varepsilon = 180° - \varphi \approx 25{,}24°$

$SA = \sqrt{99}$

$\Big\} \to SM = 9$



$$\vec{SM} = -\frac{9}{3}\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \to M = (0|4|3)$$

(SM ist kollinear zu $\vec{v}$, antiparallel
und $v = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$)

d) g und f können nicht parallel sein weil der Richtungsvektor $\vec{v_f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\vec{v}$ ist.

Um den Schnittpunkt zu bestimmen löst man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3+s = 2+t \\ -2-2s = 3-t \\ 9+2s = -8-4t \end{array} \right. \rightarrow \text{II} \quad t = 5+2s \begin{array}{l} \nearrow \text{I} \quad 3+s = 2+5+2s \rightarrow s = -4 \\ \searrow \text{III} \quad 9+2s = -8-4(5+2s) \rightarrow s = \frac{-37}{10} \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, also stehen f und g Windschief zu einander.

e) $D \in f \rightarrow D = \begin{pmatrix} 2+t \\ 3+t \\ -8-4t \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AD} = \begin{pmatrix} t-2 \\ +t-2 \\ -4t-10 \end{pmatrix}$

$|\vec{AD}| = 6 \rightarrow (+t-2)^2 + (+t-2)^2 + (-4t-10)^2 = 6^2$

$18t^2 + 72t + 72t = 0 \rightarrow t = -2$

Rücksubstitution $D = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3-2 \\ -8-4(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) ABCD ist ein Quadrat $\rightarrow$

$\rightarrow \vec{AC} = 2\vec{AM} \rightarrow C = \text{"}A + 2AM\text{"} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \vec{BD} = 2\vec{MD}$ oder $\vec{CB} = \vec{DA} \rightarrow B = (0|7|6)$

g) $\Omega: \vec{r} = \vec{r_S} + p\,\vec{SA} + q\,\vec{SD}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$P \in \Omega \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3+p-3q = -2 \\ -2+7p+3q = -1 \\ 9-7p-9q = -1 \end{array} \right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{II}+\text{III} \rightarrow 7 = -6q = -2 \rightarrow q = \frac{3}{2}$$

$\text{I}+\text{II} \rightarrow 1 + 8p = -3 \rightarrow p = -\frac{1}{2}$

$p = -\frac{1}{2}$ und $q = \frac{3}{2}$ erfüllen ALLE Gleichungen $\rightarrow P \in \Omega$

3) $\#\Omega = 27 \quad \#\heartsuit = 9 \quad \#\overline{\heartsuit} = 18$

$a_1)$ $P(\heartsuit) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

$a_2)$ $P(\heartsuit\heartsuit) = \frac{9}{27} \cdot \frac{8}{26} = \frac{4}{39}$

$a_3)$ $P(\#\heartsuit = 1) = \frac{9}{27} \cdot \frac{18}{26} \cdot \frac{17}{25} \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} + \frac{18}{27} \cdot \frac{9}{26} \cdot \frac{17}{25} \cdot \frac{16}{24} \cdot \frac{15}{23} + \dots$

ODER MIT KOMBINATORIK

$$P(\#\heartsuit = 1) = \frac{\binom{9}{1} \cdot \binom{18}{4}}{\binom{27}{5}} = \frac{102}{299} \simeq 34{,}11\%$$

$$P(\#\heartsuit \geq 2) = 1 - P(\#\heartsuit \leq 1) = 1 - P(\#\heartsuit = 0) - P(\#\heartsuit = 1)$$

$$= 1 - \frac{\binom{18}{5}}{\binom{27}{5}} - \frac{102}{299} = 55{,}27\%$$

b) $P(xxx) = P(\heartsuit\heartsuit\heartsuit) + P(\star\star\star) + P(\circ\circ\circ) + P(\square\square\square)$

$$= \frac{9}{27} \cdot \frac{8}{26} \cdot \frac{7}{25} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{27 \cdot 26 \cdot 25} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{27 \cdot 26 \cdot 25} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{27 \cdot 26 \cdot 25} \simeq 5{,}09\%$$

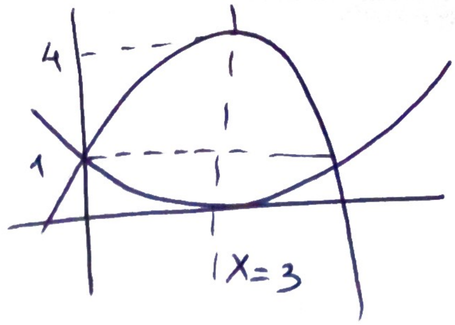
c) $P(R) = \frac{R}{R+J} = \frac{27}{27+25} = \frac{27}{52}$

$$P(R \mid \heartsuit) = \frac{P(\heartsuit \mid R) \cdot P(R)}{P(\heartsuit)} = \frac{\frac{9}{27} \cdot \frac{27}{52}}{\frac{15}{52}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$P(\star) = \frac{7+x}{52} = \frac{4}{13} \rightarrow x = 9$$

$$P(xxy) = 3 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 18}{27 \cdot 26 \cdot 25} + 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 20}{27 \cdot 26 \cdot 25} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 22}{27 \cdot 26 \cdot 25} + 3 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 23}{27 \cdot 26 \cdot 25} = 55{,}8\%$$

4) a) f → Parabel mit S(3|4),
gespiegelt und gestaucht
f(0) = 1



---

g → Parabel mit S(3|0)
gestaucht
g(0) = 1

b) Schnittpunkt (0|1) und durch Symmetrie → (6|1)
Oder mit Gleichung f(x) = g(x)

$$-\frac{1}{3}(x-3)^2+4 = \frac{1}{9}(x-3)^2$$

$$4 = \frac{4}{9}(x-3)^2 \xrightarrow{\pm\sqrt{\ }} \pm 2 = \frac{2}{3}(x-3)$$

$$\rightarrow (x-3) = \pm 3 \rightarrow \underline{x_1 = 0} \quad \underline{x_2 = 6}$$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2+2x+1 \rightarrow F(x) = -\frac{1}{9}x^3+x^2+x$

$g(x) = \frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1 \rightarrow G(x) = \frac{1}{27}x^3-\frac{1}{3}x^2+x$

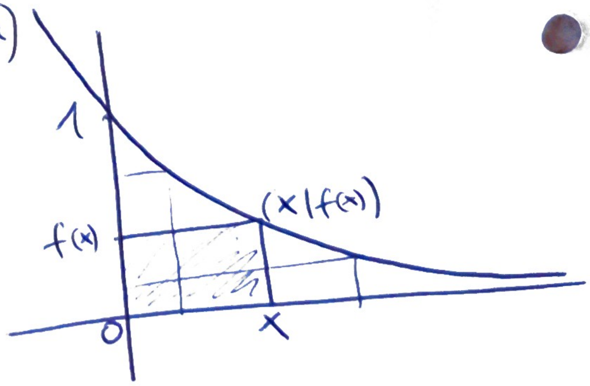
d) $A = \int_0^6 f(x)-g(x)\,dx = F(x)-G(x)\Big|_0^6 = -\frac{4}{27}x^3+\frac{4}{3}x^2\Big|_0^6$

$= \cancel{288} + = (-32+48)-(0+0) = \underline{\underline{16}}$

---

5) $f(x) = e^{-x}$

a)



b) $A(x) = xe^{-x}$

c) $A'(x) = 1\cdot e^{-x}+x(e^{-x}\cdot(-1))$
$= (1-x)e^{-x}$

$A''(x) = -1\cdot e^{-x}+(1-x)(e^{-x}(-1))$
$= (x-2)e^{-x}$

d) A maximal ⟺ $A'(x)=0$ und $A''(x)<0$

$(1-x)e^{-x} = 0 \rightarrow x = 1$

$A''(1) = -1\cdot e^{-1} < 0$

Rechteck mit maximalen Flächeninhalt für $x = 1$

6)

a) Ansatz $y = m(x - x_p) + y_p$ (Punkt-Steigungsform)

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 4x^2 - (x+1) \cdot 8x}{(4x^2)^2} = \frac{-4x^2 - 8x}{16x^4} = -\frac{x+2}{4x^3}$$

$$m = f'(1) = -\frac{3}{4} \qquad y_p = f(1) = \frac{1}{2}$$

$$t: \; y = -\frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

b)

$$x^3 - \frac{17}{6}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$

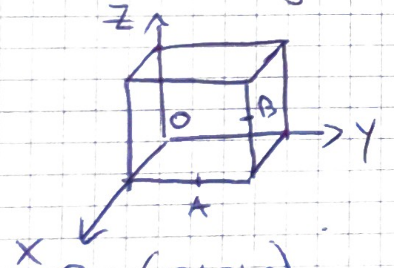
$$6x^3 - 17x^2 + 11x - 2 = 0$$

$$6x^3 - 17x^2 + 11x - 2 : x - 2 = 6x^2 - 5x + 1$$

$$6x^2 - 5x + 1 = (3x-1)(2x-1) = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{3}$$

c)

Mit Vektorgeometrie



Sei $O = (0|0|0)$

dann $A = (6|3|0)$ $B = (6|6|3)$

$C = (0|0|6)$

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{CA \;\; CB}$$

$$= \frac{36 + 18 + 18}{\sqrt{81} \; \sqrt{81}}$$

$$= \frac{72}{81}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 27{,}27^\circ$$

Mit Trigonometrie

$\overline{AB}$ ist eine Halbe-Diagonale

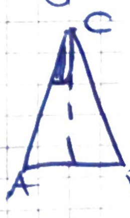
$$AB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Mit Pythagoras (3D)

$$CA = CB = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = 9$$

ABC ist gleichschenklig!

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$



$$\gamma = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$\approx 27{,}27^\circ$$