

Mathematik (Typen A,B,D,E)

Bemerkungen: Die Lösung jeder Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet.
Für die Note 6 müssen mindestens 50 Punkte erzielt werden.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f : $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$.

- Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion f durch (Definitionsmenge, Nullstellen, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte, Graph (Einheit: 1cm)).
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die begrenzt wird durch die Funktionskurve und die Geraden $y = 0$, $y = x$ und $x = b$ für $b = 3$ und für $b \rightarrow \infty$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gerade g : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Die Gerade g wird bei $x_1 = 12$ von einem Kreis k_1 berührt, dessen Mittelpunkt M_1 auf der y -Achse liegt. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises k_1 .
- Welche Gleichungen haben die Kreise mit dem Radius 5, welche die Gerade g und die y -Achse berühren?

Aufgabe 3

In einer Schweizer Fabrik werden an drei Fließbändern A, B und C Präzisionsinstrumente von Hand hergestellt. Dabei werden an Band A 45%, an Band B 25% und an Band C 30% der benötigten Instrumente fabriziert. Es stellt sich heraus, dass an Band A 5%, an Band B 2% und an Band C 4% der Instrumente defekt sind.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Instrument defekt ist?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Instrument an Fließband C produziert wurde, wenn man weiss, dass es defekt ist.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Instrument an Fließband A zusammengesetzt wurde, wenn man weiss, dass es in Ordnung ist.

Der Zugang zum Computernetz der Fabrik wird über einen eindeutigen Anmeldenamen und ein Kennwort (Passwort) geregelt.

- Wie viele Anmeldenamen aus 8 Buchstaben sind denkbar, wenn nur die Grossbuchstaben A bis Z zur Verfügung stehen?
- Wie viele Kennwörter mit 6 verschiedenen Zeichen sind denkbar, wenn nur Grossbuchstaben verwendet werden?

Aufgabe 4

- I. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC hat die Basis $\overline{AB} = 2$ und die Höhe $h_c = 2$. Ein Kreis berührt die Basis in deren Mittelpunkt und geht ausserdem durch die Spitze C.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Kreisteile, welche nicht innerhalb des Dreiecks liegen.
 - Der Kreis schneidet die Seite $a = \overline{BC}$ im Punkt S. Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und S.
- II. Eine Eisenkugel mit dem Volumen 400 cm^3 wird mit 100g Gold auf der ganzen Oberfläche (Dichte $19,29 \text{ g/cm}^3$) gleichmässig vergoldet. Wie gross ist der Durchmesser der Eisenkugel und wie dick ist die Vergoldung?

Aufgabe 5

Ein Körper besteht aus einem geraden Kreiszylinder mit aufgesetzter Halbkugel. Zylinderradius, Zylinderhöhe und Radius der Halbkugel haben je die Länge a. Diesem Körper wird ein gerader Kreiskegel einbeschrieben mit der Spitze im Mittelpunkt der Zylinderstandfläche und dem Leitkreis auf der Halbkugeloberfläche. Bestimmen Sie die Höhe des Kreiskegels mit maximaler Mantelfläche.

Aufgabe 6

- I. Berechnen Sie alle reellen Zahlen k, für welche die Gleichung

$$x^2 + x + 3 = k(x^2 + 5)$$

mit der Variablen x, genau eine Lösung hat.

- II. Ein Quadrat wird durch die Geraden mit den Gleichungen $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$ begrenzt. Die Kurven mit den Gleichungen $y = e^x$ und $y = \ln x$ schneiden vom Quadrat zwei Ecken ab.
- Zeichnen Sie Kurven und Quadrat und schraffieren Sie die Restfläche.
 - Bestimmen Sie den Inhalt der Restfläche.