

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Die maximale Punktesumme braucht für die Note 6 nicht erreicht zu werden.

MATHEMATIK

TYPEN A, B, D, E

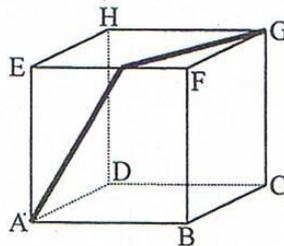
1. Im Einheitsquadrat $O(0/0)A(1/0)B(1/1)C(0/1)$ wird der Graph der Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = x^2$ eingezeichnet.
Man wählt nun einen Punkt P auf dem Graphen von f (zwischen O und B) und legt durch P die Horizontale und die Vertikale. Man betrachtet dann die zwei Rechtecke mit den Diagonalen AP beziehungsweise CP .
 - a) Bestimmen Sie denjenigen Punkt P , für den die Summe der Flächeninhalte der beiden Rechtecke möglichst gross wird.
 - b) Der Schnittpunkt der Strecke AC mit dem Graphen von f sei Q .
Untersuchen Sie, ob die Punkte P und Q identisch sind.
2. Man würfelt nacheinander mit drei echten Würfeln; die erzielten Augenzahlen seien X_1, X_2 und X_3 .
Man bildet dann $S = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$.
 - a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 = X_2 = X_3$ gilt?
 - b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_3 > X_1 + X_2$ gilt?
 - c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass S ohne Rest durch 5 teilbar ist?
 - d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass S eine Primzahl ist?
3. Gegeben sei der Kreis mit Mittelpunkt $M(3/9)$ und Radius $r = 5$.
Im Punkt $L(-11/11)$ startet ein Strahl mit dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; dieser Strahl wird am Kreis reflektiert.
 - a) Berechnen Sie den Punkt R , in welchem der Strahl reflektiert wird.
 - b) Untersuchen Sie, ob der reflektierte Strahl durch den Koordinatenursprung geht.

4. Der Graph der Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ (a, b reell) geht durch die Punkte $P(\frac{1}{4}\pi/0)$ und $Q(\frac{1}{2}\pi/1)$.
- Bestimmen Sie a und b .
 - Berechnen Sie die Nullstellen, Extremalstellen und Wendestellen von f und skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[0, 2\pi]$.
 - In den Wendepunkten des Graphen von f werden die Wendetangenten gezeichnet. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Wendetangenten und den Inhalt der Fläche, welche von den Wendetangenten und vom Graphen von f eingeschlossen wird.
5. Lösen Sie die folgenden Kurzaufgaben:

- 5.1. Bestimmen Sie alle reellen Lösungspaare (x, y) des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} x + \lg y = 3 \\ (y^2)^x = 10^4 \end{cases} \quad \lg y \text{ ist der Logarithmus von } y \text{ zur Basis } 10$$

- 5.2. Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge k .
Wie lang ist der kürzeste Weg auf der Würfeloberfläche von der Ecke A zur gegenüberliegenden Ecke G ?



- 5.3. Bestimmen Sie zwei natürliche Zahlen a und b , für welche die Differenz ihrer Quadrate 39 ist.
Wie viele solche Paare gibt es?