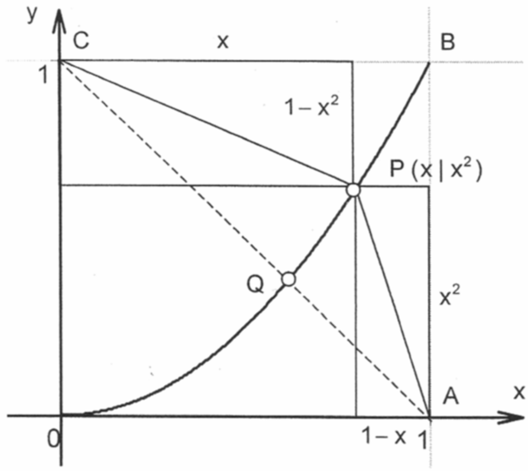
### Aufgabe 1a)




$$\text{Fläche}(x) = (1-x)\cdot x^2 + x\cdot(1-x^2) = -2x^3 + x^2 + x$$

$$\text{Fläche}'(x) = -6x^2 + 2x + 1 \underbrace{=0}_{\text{für Extr.}} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{28}}{-12} = \frac{1\mp\sqrt{7}}{6} = \begin{cases} -2.7\ldots \text{ (nicht brauchbar)} \\ +0.6076\ldots \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_P = 0.608\ldots \\ y_P = {x_P}^2 = 0.369\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P(\,0.61 \mid 0.37\,)}}$$

### Aufgabe 1b)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = -x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Schnittgleichung} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 0.618 \\ -1.618 \text{ (nicht brauchbar)} \end{cases} \Rightarrow x_Q = 0.618\ldots \Rightarrow x_Q \neq x_P \Rightarrow \underline{\underline{Q \neq P}}$$

### Aufgabe 2a)

$$P_a = \underbrace{1}_{X_1 \text{ beliebig}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{X_2 \text{ gleich wie } X_1} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{X_3 \text{ gleich wie } X_1} = \underline{\underline{\frac{1}{36}}}$$

### Aufgabe 2b)

$$P_b = \underbrace{P(X_1+X_2=2)}_{\frac{1}{36} \text{ siehe Zeichnung}} \cdot \underbrace{P(X_3>2)}_{\frac{4}{6}\ (3,4,5 \text{ oder } 6)} + \underbrace{P(X_1+X_2=3)}_{\frac{2}{36} \text{ siehe Zeichnung}} \cdot \underbrace{P(X_3>3)}_{\frac{3}{6}\ (4,5 \text{ oder } 6)} +$$

$$+ \underbrace{P(X_1+X_2=4)}_{\frac{3}{36} \text{ siehe Zeichnung}} \cdot \underbrace{P(X_3>4)}_{\frac{2}{6}\ (5 \text{ oder } 6)} + \underbrace{P(X_1+X_2=5)}_{\frac{4}{36} \text{ siehe Zeichnung}} \cdot \underbrace{P(X_3>5)}_{\frac{1}{6}\ (6)} = \underline{\underline{\frac{20}{216}}}$$

$X_1 =$

| $X_2 =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 3 | 4 | 5 | | | | |
| 4 | 5 | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Punkt-summe $X_1+X_2$

**Aufgabe 2c)** Mindestens eine der Zahlen $X_1$, $X_2$ oder $X_3$ muss eine Fünf sein.

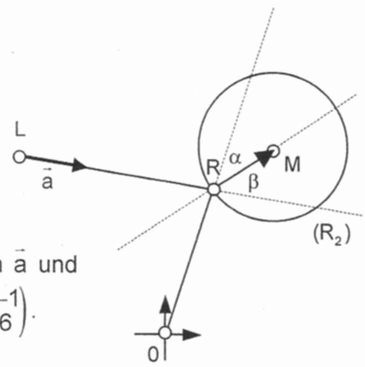
Gegenereignis: Keine der Zahlen ist eine Fünf.

$$P_c = 1 - \underbrace{\tfrac{5}{6}}_{\text{keine Fünf}} \cdot \underbrace{\tfrac{5}{6}}_{\text{keine Fünf}} \cdot \underbrace{\tfrac{5}{6}}_{\text{keine Fünf}} = 1 - \tfrac{125}{216} = \underline{\underline{\frac{91}{216}}}\ .$$

**Aufgabe 2d)** Zwei der Faktoren müssen eine Eins sein und der dritte eine Primzahl, also eine Zwei, eine Drei oder eine Fünf.

$$P_d = \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{\text{eine Eins}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{\text{eine Eins}} \cdot \underbrace{\tfrac{3}{6}}_{\text{eine Zwei, Drei oder Fünf}} + \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{\text{eine Eins}} \cdot \underbrace{\tfrac{3}{6}}_{\text{eine Zwei, Drei oder Fünf}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{\text{eine Eins}} + \underbrace{\tfrac{3}{6}}_{\text{eine Zwei, Drei oder Fünf}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{\text{eine Eins}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{6}}_{\text{eine Eins}} = \underline{\underline{\frac{9}{216}}}$$

### Aufgabe 3a)




$$\left.\begin{array}{ll} \text{Kreis:} & (x-3)^2 + (y-9)^2 = 25 \\ \text{Strahl:} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow (2t-14)^2 + (-t+2)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 60t + 175 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 5\ ;\ t_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R(-1|\,6\,)}}$$

(Man muss den kleineren t-Wert nehmen, siehe Zeichnung.)

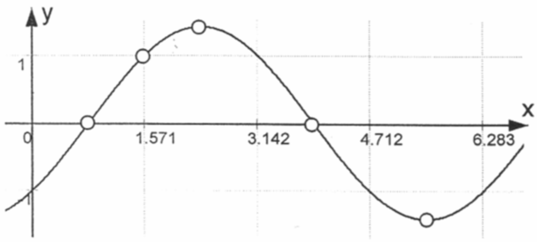
**Aufgabe 3b)** Es ist zu prüfen, ob der Radiusvektor $\overrightarrow{RM}$ zwischen $\vec{a}$ und $\overrightarrow{0R}$ winkelhalbierend sei. Es ist $\overrightarrow{RM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{0R} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Für die Cosinus-Werte der Winkel $\alpha$ und $\beta$ erhält man

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{25}} = \frac{14}{\sqrt{37}\cdot 5} = 0.46\ldots \ ; \ \cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{25}} = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.44\ldots \neq \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha \neq \beta}}\ .$$

Der reflektierte Strahl geht NICHT durch den Koordinatenursprung.

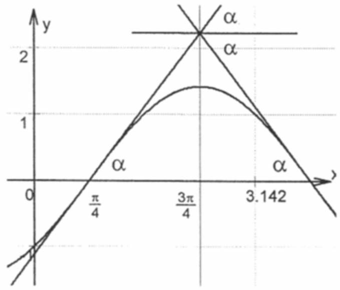
**Aufgabe 4a)** $\left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{4}\pi)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0 \\ f(\frac{1}{2}\pi)=1 \;\Rightarrow\; a+0\cdot b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow\; a=1\;;\; b=-1 \;\Rightarrow\; f(x)=\sin x-\cos x\,.$




**Aufgabe 4b)**

Nullstellen:
$f(x)=\sin x-\cos x=0 \;\Rightarrow\; \sin x=\cos x$
$\Rightarrow\; \tan x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}$ bzw. $x=\frac{5\pi}{4}$

Extremalstellen:
$f'(x)=\cos x+\sin x=0 \;\Rightarrow\; \sin x=-\cos x$
$\Rightarrow\; \tan x=-1 \;\Rightarrow\; x=\frac{3\pi}{4}$ bzw. $x=\frac{7\pi}{4}$ ; $y=\pm\sqrt{2}$




Wendestellen:
$f''(x)=-\sin x+\cos x=0 \;\Rightarrow\; \sin x=\cos x$
$\Rightarrow\; \tan x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}$ bzw. $x=\frac{5\pi}{4}$ ; $y=0$

**Aufgabe 4c)** Steigung im (ersten) Wendepunkt: $m=f'(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.
Steigungswinkel der Tangente: $\tan\alpha=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \alpha=54.73...^\circ$.
Der spitze Winkel zwischen den beiden Tangenten beträgt $180^\circ-2\alpha=\underline{\underline{70.53^\circ}}$.

Gleichung der Tangente: $g(x)=\sqrt{2}\cdot(x-\frac{\pi}{4})+0=\sqrt{2}\,x-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

Gesuchte Fläche: $A=2\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\big(g(x)-f(x)\big)dx=2\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\Big(\sqrt{2}\,x-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\sin x+\cos x\Big)dx=$

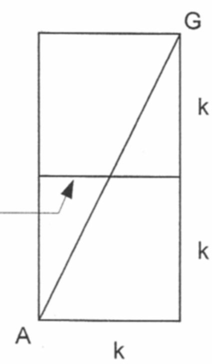
$$=2\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}x+\cos x+\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{4}-2\sqrt{2}}}\;\approx\;0.661$$

**Aufgabe 5.1.**

$$\left.\begin{array}{l} x+\lg y=3 \\ \left(y^2\right)^x=10^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+\lg y=3 \\ y^{2x}=10^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+\lg y=3 \\ 2x\cdot\lg y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 2x\cdot\underbrace{(3-x)}_{\text{aus der oberen Gl.}}=4$$

$$\Rightarrow\; 2x^2-6x+4=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x=\Big\langle{2 \atop 1}}} \;\Rightarrow\; \lg y=\Big\langle{3-2=1 \atop 3-1=2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y=\Big\langle{10 \atop 100}}}$$

**Aufgabe 5.2.**




Man klappt den Würfeldeckel auf, so dass die vordere und die obere Würfelseite in einer Ebene liegen. Dann verbindet man A mit G geradlinig und sieht sofort:

$\overline{AG}=\sqrt{k^2+(2k)^k}=\sqrt{5k^2}=\underline{\underline{\sqrt{5}\cdot k}}$

Vielleicht hatte der Autor folgende Extremwertaufgabe im Sinn: Suche $x$ so dass $\overline{AG}(x)=\sqrt{x^2+k^2}+\sqrt{(k-x)^2+k^2}$ minimal wird. $\overline{AG}'(x)=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow x=\frac{k}{2}$

**Aufgabe 5.3.**

Sei $m$ die grössere und $n$ die kleinere der beiden gesuchten Zahlen.
Wir betrachten einerseits die Zerlegung $m^2-n^2=(m-n)\cdot(m+n)$.
Andererseits ist $39=1\cdot\underbrace{3}_{\text{Primzahl}}\cdot\underbrace{13}_{\text{Primzahl}}$ die einzig mögliche Faktorenzerlegung von 39.
Beachtet man noch, dass $(m-n)$ der kleinere und $(m+n)$ der grössere Faktor ist, gilt somit

entweder $\left.\begin{array}{l}(m-n)=1\\(m+n)=39\end{array}\right\} \Rightarrow\; \underline{\underline{m=20\,;\,n=19}}$ oder aber $\left.\begin{array}{l}(m-n)=3\\(m+n)=13\end{array}\right\} \Rightarrow\; \underline{\underline{m=8\,;\,n=5}}$.

Es gibt nur diese zwei Paare.