

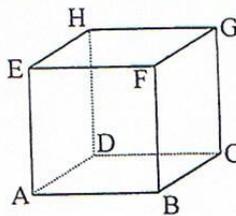
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 werden 40 Punkte benötigt.

MATHEMATIK

TYPEN A, B, D, E; NORMALES NIVEAU

1. Für jede positive reelle Zahl a ist durch $f(x) = \frac{x^3 - a}{x^2}$ eine Funktion gegeben.
 - a) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion für $x = -2$ ein Extremum besitzt. Diskutieren Sie die erhaltene Funktion vollständig (Nullstellen, Extremal- und Wendestellen, Asymptoten) und zeichnen Sie den Graphen.
 - b) Bestimmen Sie den Winkel, unter dem der Graph der in a) bestimmten Funktion die x -Achse schneidet. Zeigen Sie, dass dieser Winkel unabhängig von a ist.
 - c) Der Graph der in a) bestimmten Funktion schliesst mit der schiefen Asymptote und der x -Achse im 1. Quadranten eine ins Unendliche reichende Fläche ein. Bestimmen Sie deren Inhalt.
2. Der Kreis K geht durch die Punkte $A(12/13)$ und $B(21/16)$; sein Mittelpunkt liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $2x + 3y - 80 = 0$.
 - a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r des Kreises.
 - b) Bestimmen Sie die Länge des Kreisbogens AB (wählen Sie denjenigen Bogen, dessen Zentriwinkel kleiner als 180° ist).
 - c) Die beiden Kreistangenten in A und in B schliessen mit diesem Kreisbogen eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

3. Gegeben sei der Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 1.



In einer Urne befinden sich nun 8 Kugeln, bezeichnet mit A, B, C,, H.

- a) Man zieht zufällig zwei Kugeln (ohne Zurücklegen).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand der beiden dadurch bestimmten Eckpunkte 1 ist?
- b) Man zieht zufällig drei Kugeln (ohne Zurücklegen).
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei so bestimmten Eckpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.
- c) Man zieht nun Kugeln mit Zurücklegen.
- 1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man nach 8 Ziehungen jede Kugel genau einmal gezogen hat?
 - 2) Wie viele Ziehungen sind nötig, damit die Wahrscheinlichkeit, die Kugel A mindestens einmal zu ziehen, grösser als 99% wird?
4. Vom Koordinatenursprung aus werden die Tangenten an den Graphen der Funktion $f(x) = a \cdot e^x$ ($a > 0$) und an den Graphen der Umkehrfunktion von f gelegt.
- a) Erstellen Sie eine Skizze für $a = 1$. Welchen Winkel schliessen die beiden Tangenten für $a = 1$ ein?
- b) Wie muss a gewählt werden, damit die beiden Tangenten zusammen fallen?
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von den beiden Graphen im 1. Quadranten eingeschlossen wird
5. Lösen Sie die folgenden voneinander unabhängigen Aufgaben.
- 5.1. Bestimmen Sie (in der Grundmenge \mathbb{R}) die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{2x}{x-2} < \frac{x}{x+1}$.
- 5.2. Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:
- $$\begin{cases} 2 \cdot \ln x + 3 \cdot \ln y = 1 \\ x \cdot y = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$
- 5.3. Von einem Dreieck kennt man den Flächeninhalt $A = 50\text{cm}^2$. Die Höhe h_c (Höhe auf c) ist gleich lang wie die Seite c . Der der Seite c anliegende Winkel α ist 60° .
Bestimmen Sie alle Seiten und alle Winkel dieses Dreiecks.