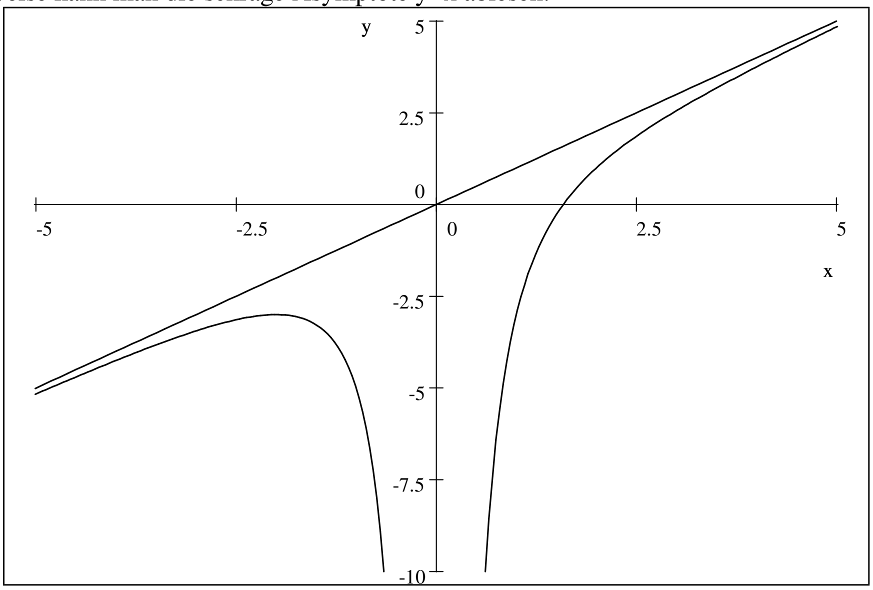
Herbst 2003

1. Für jede positive Zahl a ist durch $f(x) = \frac{x^3-a}{x^2}$ eine Funktion gegeben.
   a) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion für x=-2 ein Extremum besitzt.
   Diskutieren Sie die erhaltene Funktion vollständig und zeichnen Sie den Graphen.

$$\begin{aligned} f\prime(-2) &= 0 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

   $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2} = x - \frac{4}{x^2}$
   $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Senkrechte Asymptote x=0 (y-Achse).
   Der Zähler ist weder punkt- noch achsensymmetrisch (gerade und ungerade Exponenten), also ist f weder punkt- noch achsensymmetrisch ((0|0) bzw. y-Achse).
   Aus der zweiten Schreibweise kann man die schräge Asymptote y=x ablesen.



   Nullstelle : $x_N = \sqrt[3]{4}$
   Minimum(-2|-3)
   $f\prime\prime(x) \neq 0$ für alle x, also keine Wendepunkte

   b) Bestimmen Sie den Winkel unter dem die in a) bestimmte Funktion die x-Achse schneidet.
   Zeigen Sie, dass dieser Winkel unabhängig von a ist.
   Nullstelle : $x_N = \sqrt[3]{a}$
   $f\prime(\sqrt[3]{a}) = \tan\alpha$
   $\tan\alpha = 3$, also unabhängig von a

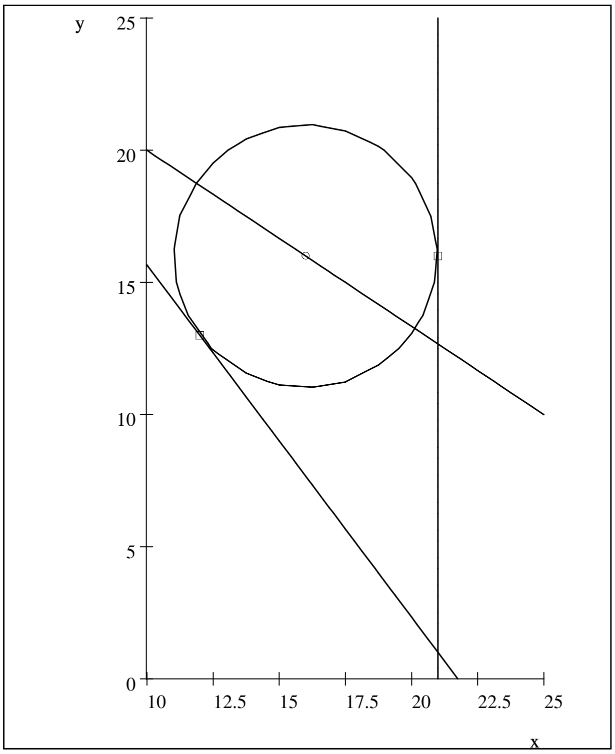
   c) Der Graph der in a) bestimmten Funktion schliesst mit der schiefen Asymptote und der x-Achse im I. Quadranten eine ins Unendliche reichende Fläche ein.
   Bestimmen Sie deren Inhalt.

$$\begin{aligned} A &= A_\triangle + A_\infty \\ A &= A_\triangle + \lim_{b\to\infty} \int_{x_N}^{b} (x - f(x))\, dx \\ A &= \frac{3}{2} 4^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

2. Der Kreis K geht durch die Punkte A(12/13) und B(21/16). Sein Mittelpunkt liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $2x + 3y - 80 = 0$.
   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r des Kreises.
   Mittelsenkrechte zu AB schneiden mit g liefert M :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_M} &= \begin{pmatrix} \frac{33}{2} \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix} \\ r &= \left\| \overrightarrow{AM} \right\| = 5 \end{aligned}$$

$K:(x-16)^2+(y-16)^2=25$



b) Bestimmen Sie die Länge des Kreisbogens AB (Zentriwinkel <180°).

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{MA\cdot MB}\\ \cos\alpha &= \frac{-20}{25}=-\frac{4}{5}\\ \alpha &= 143.13^\circ\\ A_{AB} &= \frac{143.13^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 5=12.49\end{aligned}$$

c) Die Kreistangenten in A und B schliessen mit diesem Kreisbogen eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.
Die Tangente durch B ist senkrecht und hat die Gleichung x=21.
Die Tangente durch A hat den Normalenvektor $\overrightarrow{AM}$:

$$t_A:4x+3y-87=0$$

t_A schneidet t_B in

$$y=1$$

S(21/1).
Die gesuchte Fläche wird symmetrisch durch MS geteilt und ergibt sich somit als das doppelte der Differenz aus Dreiecksfläche SBM (rechtwinklig) und Kreissektor zu $\alpha/2=71.565^\circ$:

$$\begin{aligned}A &= 2\cdot(A_\triangle-A_{Sektor})\\ A &= 43.774\end{aligned}$$

3. Gegeben sei der Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 1.
In einer Urne befinden sich 8 Kugeln, bezeichnet mit A,B...H.
 a) Man zieht zufällig zwei Kugeln (ohne Zurücklegen).
 Wie gross ist die WS, dass der Abstand der beiden dadurch bestimmten Eckpunkte 1 ist ?
 Die WS dafür ist $24/56=\frac{3}{7}=42.8\,6\%$.
 b) Man zieht zufällig drei Kugeln (ohne Zurücklegen).
 Wie gross ist die WS, dass die drei so bestimmten Eckpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden ?
 Man erhielte $WS=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$.

c) Man zieht nun Kugeln mit Zurücklegen.

1)Wie gross ist die WS, dass man nach 8 Ziehungen jede Kugel genau einmal gezogen hat ?

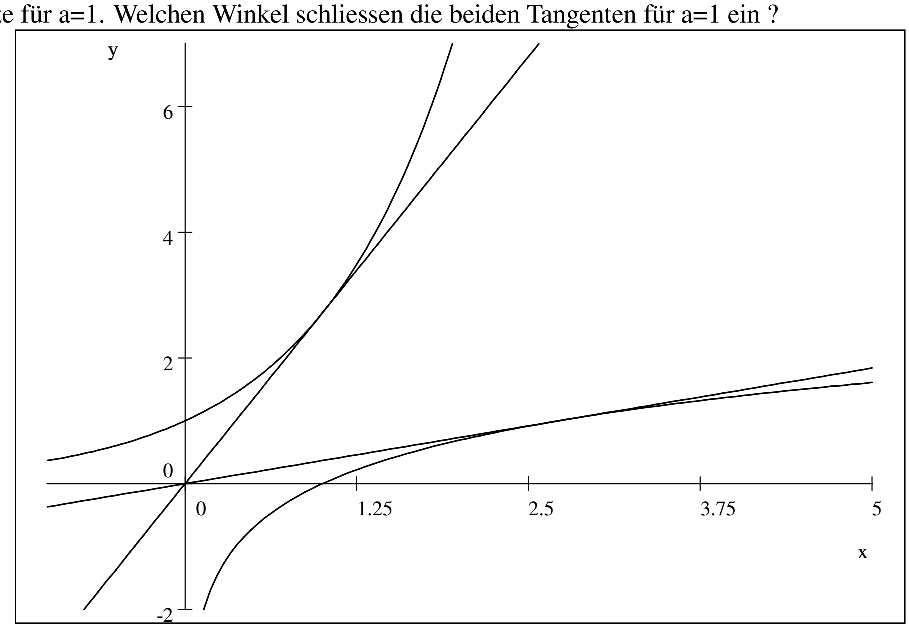
$$WS = \frac{günstige}{mögliche} = \frac{8!}{8^8} = \frac{315}{131\,072} = 0.24\%$$

2)Wie viele Ziehungen sind nötig, damit die WS, die Kugel A mindestens einmal zu ziehen, grösser als99% wird ?

$$n \geq 35$$

4. Vom Koordinatenursprung aus werden die Tangenten an den Graph der Funktion $f(x) = a \cdot e^x \quad (a > 0)$ und an den Graphen der Umkehrfunktion von f gelegt.

a) Erstellen Sie eine Skizze für a=1. Welchen Winkel schliessen die beiden Tangenten für a=1 ein ?



$$\begin{aligned} m_{Tangente} &= f\prime(x) \\ x_T &= 1 \\ y_T &= e \end{aligned}$$

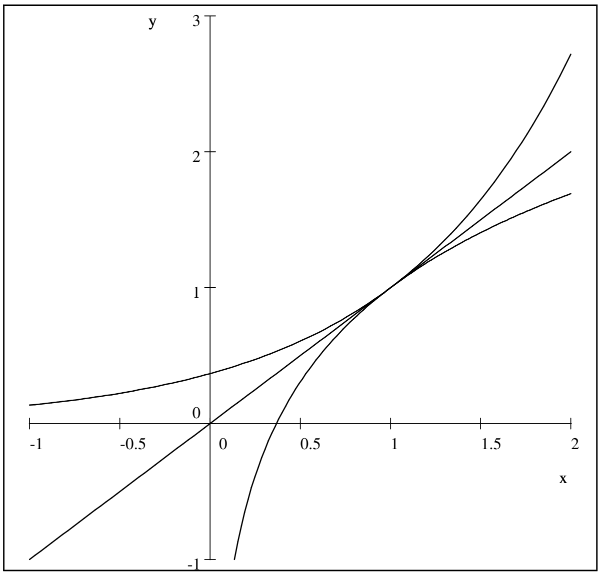
Die Tangente an f ist also $y = e \cdot x$.
Da sich bei der Umkehrfunkton x und y vertauschen ist die Tangente an $f^{-1}(x) : y = \frac{1}{e} \cdot x$.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \\ \tan\alpha &= \frac{e^2 - 1}{2e} \\ \alpha &= 49,605° \end{aligned}$$

b) Wie muss a gewählt werden, damit die beiden Tangenten zusammenfallen ?
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welchen von den beiden Graphen im ersten Quadranten eingeschlossen wird.

$$\begin{aligned} m_{Tangente} &= f\prime(x) \\ x_T &= 1 \\ y_T &= ae \end{aligned}$$

Die Tangente an f ist also $y = a \cdot e \cdot x$.
Die Steigung müsste 1 sein, also $a = 1/e$.



Da die Fläche von der Winkelhalbierenden symmetrisch geteilt wird, ergibt sich die gesuchte Fläche zu :

$$A = 1 - \frac{2}{e}$$

5. Lösen Sie folgende voneinander unabhängige Kurzaufgaben.

5.1 Bestimmen Sie (in der Grundmenge $\mathbb{R}$) die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{2x}{x-2} < \frac{x}{x+1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x-2} &< \frac{x}{x+1} \\
\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x+1} &< 0 \\
\frac{x\,(x+4)}{(x+1)\,(x-2)} &< 0
\end{aligned}$$

Ein Bruch ist negativ, wenn Zähler und Nenner unterschiedliches Vorzeichen haben. Zähler und Nenner sind jeweils ein Produkt aus zwei Faktoren, die positiv sind, wenn beide Faktoren das gleiche und negativ, wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben.

Zähler>0 und Nenner<0 in $I_1 \cap I_4 =]0;2[$

Zähler<0 und Nenner>0 in $I_2 \cap I_3 =]-4;-1[$

Die Lösungsmenge ist also $L =]-4;-1[\cup]0;2[$

Zweiter Lösungsweg anhand einer Vorzeichentabelle. Man schreibt systematisch auf, wo die Faktoren von $\frac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$ ihr Vorzeichen wechseln.

Dies ist bei -4, -1, 0 und 2 der Fall. Dies trägt man in eine Tabelle ein :

	$-\infty;-4$	$-4;-1$	$-1;0$	$0;2$	$2;\infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{Z}{N}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Aus dieser Tabelle ermitteln sich die Bereiche, in denen der Bruch negativ ist, im Handumdrehen.

5.2 Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems :

$$\left| \begin{array}{c} 2\ln x + 3\ln y = 1 \\ x \cdot y = e^{-1/3} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned}
y &= e^{5/3} \\
x &= e^{-2}
\end{aligned}$$

5.3 Von einem Dreieck kennen man den Flächeninhalt A=50cm^2. Die Höhe h$_c$ ist gleich lang wie die Seite c. Der der Seite anliegende Winkel $\alpha = 30°$. Bestimmen Sie alle Seiten und Winkel dieses Dreiecks.$c = 10; h_c = 10; b = 20; a = 10\sqrt{3}; \gamma = 16,54°; \beta = 133,46°$