

Mathematik Typen A,B,D,E bzw. normales Niveau

Jede Aufgabe wird mit 12 Punkten bewertet.
Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = a + \frac{b}{x^2}$ mit den Parametern a und b .
- a) Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph von f durch den Punkt $B(1/2)$ verläuft und die Tangente t in B parallel zur Geraden mit der Gleichung $12x + 2y + 5 = 0$ ist.

(Falls Sie a) nicht lösen konnten, wählen Sie für die folgenden Teilaufgaben $a = -0.5$ und $b = 2.5$.)

- b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t und ihren Schnittpunkt A mit der x -Achse.
- c) Die Strecke AB , die x -Achse und der Graph von f begrenzen zusammen ein Flächenstück. Berechnen Sie mit den in a) berechneten Werten von a und b dessen Inhalt.
2. a) Gegeben sind die Funktionen $f: f(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ und $g: g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Zeigen Sie, dass f und g in ihrem Schnittpunkt mit der y -Achse eine gemeinsame Tangente besitzen.

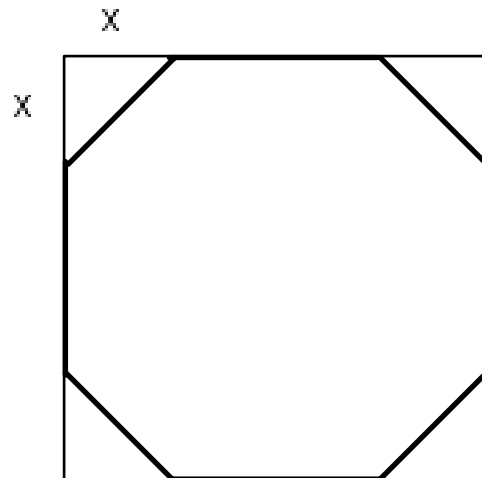
- b) Wir betrachten nun die aus f und g zusammen gesetzte

$$\text{Funktion } h(x) = \begin{cases} 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 & \text{für } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche der Graph von h und die x -Achse umschliessen.

3. Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1. An allen vier Ecken werden kongruente gleichschenklige Dreiecke mit Schenkellänge x ($0 \leq x \leq 0.5$) abgeschnitten (siehe Figur!). Es entsteht ein 8-Eck.

- a) Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des 8 - Ecks in Abhängigkeit von x .
- b) Für welches x ist das 8 - Eck regelmässig und wie gross ist dann der Umkreisradius?
- c) Betrachten Sie das Verhältnis Umfang zu Flächeninhalt.
 Wie muss man x wählen, damit dieses Verhältnis möglichst klein ist?
Bestimmen Sie die Lösung genähert (3 signifikante Ziffern).



4. Gegeben ist das Dreieck $A(4/ -2/ -3)$, $B(2/6/13)$, $C(6/ -1/17)$.
- a) Beweisen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und berechnen Sie alle Winkel.
- b) Der Punkt D ergänze das Dreieck zu einem Rechteck ABCD. Bestimmen Sie die Koordinaten von D und die des Mittelpunktes M des Rechtecks.
- c) S sei die Spitze einer geraden Pyramide mit Grundfläche ABCD. Die Höhe der Pyramide sei gleich lang wie die längere Seite der Grundfläche. Bestimmen Sie S und das Volumen der Pyramide (1 Lösung genügt!).
5. 1. Ein gewöhnlicher Spielwürfel werde 4-mal geworfen.
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Produkt der 4 Augenzahlen den Wert 8 ?
- b) Wie viele solche 4-er Serien müssten Sie durchführen, damit der Produktwert 8 mit 90% Sicherheit mindestens einmal vorkommt?
2. Der Kreis k mit Radius $r = 10$ schneidet aus der x-Achse eine Sehne der Länge 12 heraus. Sein Mittelpunkt liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $x + 2y = 0$.
- a) Bestimmen Sie die Gleichung von k.
- b) Vom Nullpunkt aus werden die Tangenten an den Kreis k gelegt. Unter welchem Winkel schneiden sich diese beiden Tangenten?