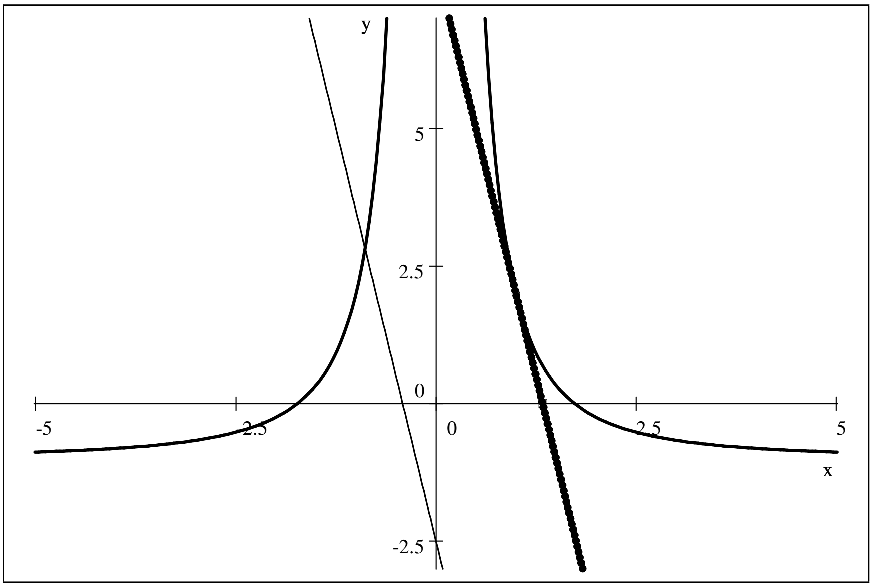
Herbst 2004

1. Gegeben ist eine Funktion f : $f(x) = a + \frac{b}{x^2}$ mit den Parametern a und b.

a) Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph von f durch den Punkt B(1/2) verläuft und die Tangente t in B parallel ist zur Geraden mit der Gleichung $12x + 2y + 5 = 0$.
Parallel sein bedeutet die gleiche Steigund zu haben, also $f\prime(1) = -\frac{12}{2} = -6$ und den gleichen Funktionswert zu haben $f(1) = 2$:

$$\begin{aligned} I.f\prime(1) &= -6 \\ II.f(1) &= 2 \\ b &= 3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$f(x) = -1 + \frac{3}{x^2}$



b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t und Ihren Schnittpunkte A mit der x-Achse.
t geht durch B(1/2) und hat die Steigung m=-6 :

$$\begin{aligned} t &: y = m(x - x_0) + y_0 \\ t &: y = -6(x - 1) + 2 \\ t &: y = -6x + 8 \\ 0 &= -6x + 8 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

c) Die Strecke AB, die x-Achse und der Graph von f begrenzen zusammen ein Flächenstück. Berechnen Sie mit den in a) berechneten Werten von a und b dessen Inhalt.

$$\begin{aligned} A &= A_f - A_\triangle \\ A &= \int_1^{\frac{4}{3}} \left(-1 + \frac{3}{x^2}\right) dx - \frac{1}{2} g \cdot h \\ A &= \left[-x - \frac{3}{x}\right]_1^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - 1\right) \cdot 2 \\ A &= \frac{5}{12} - \frac{1}{3} \\ A &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

2. Gegeben ist die Funktion f : $f(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ und g : $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.
Zeigen Sie, dass f und g in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse eine gemeinsame Tangente besitzen.

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \\ g(0) &= 3 \end{aligned}$$

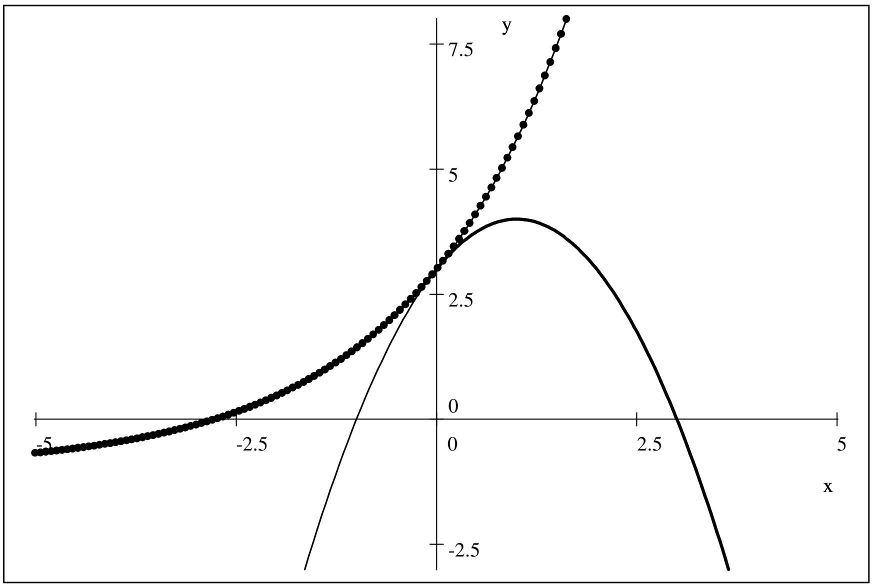
Also ein gemeinsamer Schnittpunkt mit der y-Achse bei y=3.

$$\begin{aligned} f\prime(0) &= 2 \\ g\prime(x) &= 2 \end{aligned}$$

Also auch die gleiche Steigung m=2 und somit eine gemeinsame Tangente.

a) Wir betrachten nun die aus f und g zusammengesetzte Funktion

$$h(x) = \begin{cases} 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 & f\ddot{u}r\ \ x \leq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 & f\ddot{u}r\ \ x > 0 \end{cases}$$



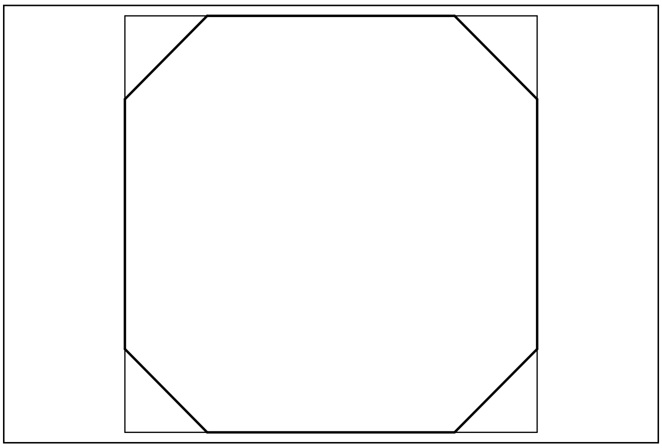
Skizzieren Sie den Graphen von h und berechne Sie den Inhalt der Fläche, die h mit der x-Achse einschliesst.
Nullstelle von h :

$$\begin{aligned} 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 &= 0 \\ x &= -4\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 3 &= 0 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{-4\ln 2}^{0} \left(4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1\right) dx + \int\limits_{0}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx \\ A &= \left[8e^{\frac{1}{2}x} - x\right]_{-4\ln 2}^{0} + \left[3x + x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3} \\ A &= 15 - 4\ln 2 \end{aligned}$$

3. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. An allen vier Ecken werden kongruente gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge x $(0 \leq x \leq 0,5)$ abgeschnitten. Es entsteht ein 8-Eck.



a) Berechnen Sie den Umfang und Flächeninhalt des 8-Ecks in Abhängigkeit von x.
Die Seiten des 8-Ecks, die auf dem Quadrat liegen haben die Länge 1-2x.
Die schräg laufenden Seiten haben die Länge $\sqrt{x^2+x^2} = x\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} U_8 &= 4 \cdot \left(1 - 2x + x\sqrt{2}\right) \\ A_8 &= A_\square - 4 \cdot A_\triangle \\ A_8 &= 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} x \cdot x = 1 - 2x^2 \end{aligned}$$

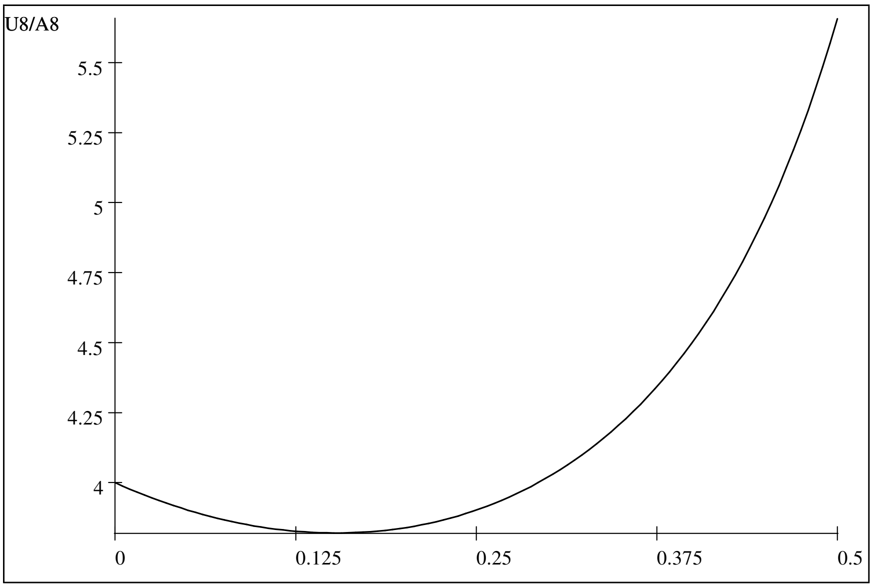
b) Für welches x ist das 8-Eck regelmässig und wie gross ist dann sein Umkreisradius ?

$$\begin{aligned} x\sqrt{2} &= 1 - 2x \\ x &= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_8 &= \frac{x\sqrt{2}}{2\sin(22.5°)} \\ R_8 &= \frac{1}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \\ R_8 &= 0,5412 \end{aligned}$$

c) Betrachten Sie das Verhältnis aus Umfang zu Flächeninhalt. Wie muss man x wählen, damit dieses Verhältnis möglichst klein ist ?
$U_8 = 4 \cdot \left(1 - 2x + x\sqrt{2}\right)$
$A_8 = 1 - 2x^2$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{U_8}{A_8} = \frac{4 \cdot \left(1 - 2x + x\sqrt{2}\right)}{1 - 2x^2} \\ V\prime(x) &= 4\frac{x^2\left(2\sqrt{2} - 4\right) + 4x + \sqrt{2} - 2}{\left(2x^2 - 1\right)^2} = 0 \\ x^2\left(2\sqrt{2} - 4\right) + 4x + \sqrt{2} - 2 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2\sqrt{2} - 4} \\ x_1 &= 0,15333 \\ x_2 &= 3,2609 \end{aligned}$$



Vorzeichenuntersuchung von V '(x). Der Nenner von V'(x) ist ein Quadrat, also stets positiv.
Der Zähler ist eine nach oben geöffnete Parabel,wechselt also an der linken Nullstellen von + nach - und an der rechten Nullstelle wieder von - nach +.
Somit ist bei x=0,1533 (einzige Lösung im Definitionsbereich) ein Vorzeichenwechsel der Ableitung von - nach + gegeben und damit handelt es sich um ein Minimum.
Randwerte V(0)=4 und V(0,5)=5,66. Also Randmaxima.

4. Geben ist das Dreieck A(4/-2/-3), B(2/6/13) und C(6/-1/17).

a) Beweisen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist und berechnen Sie alle Winkel.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

AC dürfte wohl die längste Seite (und somit die Hypotenuse) sein, also liegt der rechte Winkel bei B :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= -8 - 56 + 64 = 0 \end{aligned}$$

Der Punkt D Also ein rechter Winkel bei B.

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{BC}{AC} = \sqrt{5} \\ \alpha &= 26,565^\circ \\ \beta &= 63.435^\circ \end{aligned}$$

b) Der Punkt D ergänze das Dreieck ABC zu einem Rechteck ABCD. Bestimmen Sie die Koordinaten von D und die des Mittelpunktes M des Rechtecks.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_D} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C}}{2} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{3}{2} \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) S sei die Spitze einer geraden Pyramide mit Grundfläche ABCD. Die Höhe der Pyramide sei gleich lang wie die längere Seite der Grundfläche.

Bestimmen Sie S und das Volumen der Pyramide (eine Lösung genügt).

Die längere Seite ist $AB = 18$

Die Grundfläche ist ein Rechteck mit der Fläche $G = AB \cdot BC = 18{\cdot}9 = 162$.

Das Volumen der Pyramide ist $V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}G \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot 162 \cdot 18 = 972$.

Die Höhe wird über das Vektorprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ berechnet :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ -18 \end{pmatrix} = 18 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

n=162 ist die Fläche des Parallelogramms (Rechtecks), das von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ gebildet wird.

Die Höhe ist kolinear zu n und soll die Länge 18 haben :

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \pm 18 \cdot \underbrace{\frac{\vec{n}}{162}}_{\text{Vektor der Länge 1}} = \pm\frac{1}{9}\vec{n} = \pm 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{r_S} &= \overrightarrow{r_M} \pm \vec{h} \\ \overrightarrow{r_{S_1}} &= \begin{pmatrix} 21 \\ \frac{13}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{r_{S_2}} &= \begin{pmatrix} -11 \\ -\frac{19}{2} \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.Ein gewöhnlicher Spielwürfel werde 4-mal geworfen.

a)Mit welcher WS hat das Produkt der Augenzahlen den Wert 8 ?

8 kann aus 3-mal 2 und 1-mal 1, bzw. 1-mal 4, 1-mal 2 und 2-mal 1 entstehen.

Die erste Variante kann in 4 Anordnungen erscheinen (1 zuerst, als zweites, drittes oder viertes).

Die zweite Variante kann in $\binom{4}{2} \cdot 2 = \frac{4!}{2!2!} 2 = 12$ Anordnungen erscheinen. $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten die beiden 1 auf 4 Plätze zu verteilen und dann noch 2 Möglichkeiten die 4 und die 2 auf ihren Plätzen zu tauschen.

Alle 6 möglichen Anordungen für die beiden 1-er, bei denen die 4 links von der 2 steht : $\{$(1,1,4,2); (1,4,1,2); (1,4,2,1); (4,1,1,2); (4,1,2,1); (4,2,1,1)$\}$.

Nochmal 6 mit den gleichen Positionen für die 1-er nur mit 4 und 2 vertauscht; macht 12.

Alle Varianten haben die WS=$\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296}$

WS(Produkt der Augenzahlen den Wert 8)$= 16 \cdot \frac{1}{1296} = \frac{1}{81} = 1.23\%$

b)Wie viele solcher 4-er Serien müssten Sie durchführen, damit der Produktwert 8 mit 90% Sicherheit mindestens einmal vorkommt ?

$$\begin{aligned}
\text{WS(Produkt 8 mindestens einmal)} &\geq 90\% \\
\text{1-WS(Produkt 8 keinmal)} &\geq 0.9 \\
\text{WS(Produkt 8 keinmal)} &\leq 0.1 \\
\left(\frac{80}{81}\right)^n &\leq 0.1 \\
n &\geq \frac{\log 0.1}{\log \frac{80}{81}} = 185.36 \\
n &\geq 186
\end{aligned}$$

2.Der Kreis k mir Radius r=10 schneidet aus der x-Achse eine Sehne der Länge 12 heraus. Sein Mittelpunkt liegt auf der Geraden g mit der Gleichung $x + 2y = 0$.

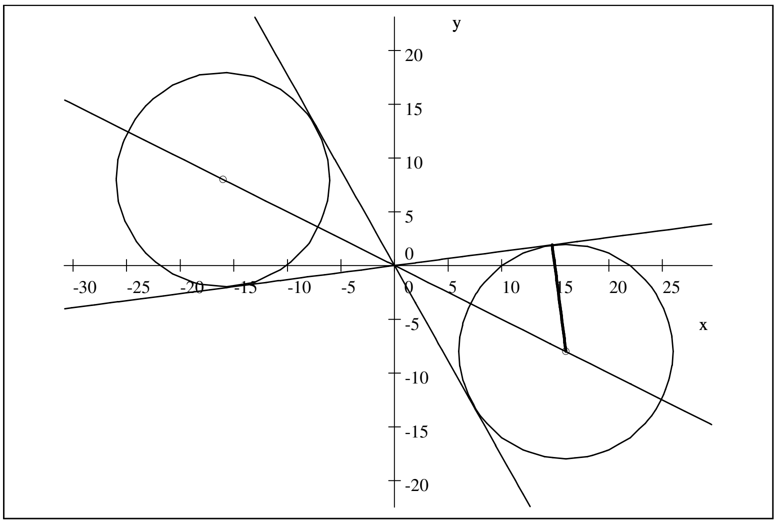
a)Bestimmen Sie die Gleichung von k.

$$\begin{aligned}
y^2 + 6^2 &= 10^2 \\
y^2 &= 64 \\
y &= \pm 8 \\
x &= \mp 16
\end{aligned}$$

Es gibt zwei Kreise, die die Bedingungen erüllen :

$k_1 : (x+16)^2 + (y-8)^2 = 100$

$k_2 : (x-16)^2 + (y+8)^2 = 100$



b)Vom Nullpunkt aus werden die Tangenten an k gelegt. Unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten?
Der halbe Schnittwinkel ergibt sich aus dem Radius und dem Abstand OM :

$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{r}{OM} \\ \alpha &= 68^\circ \end{aligned}$$