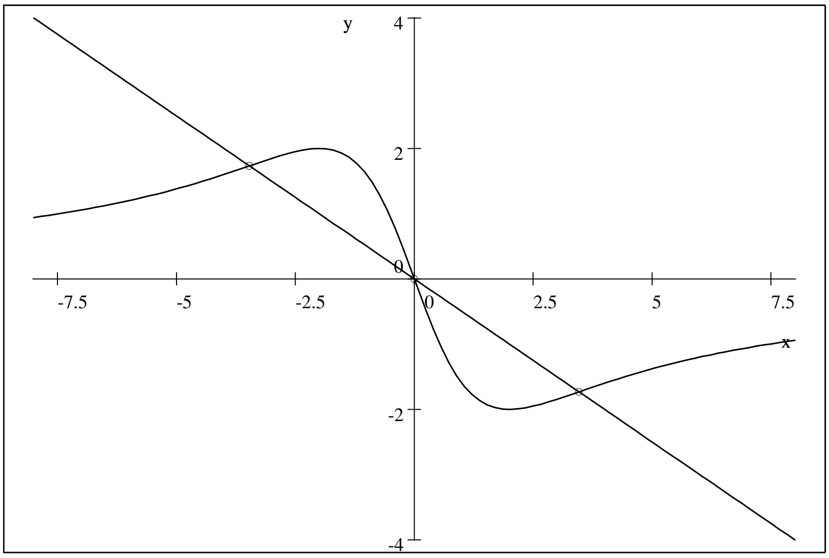
Herbst 2005

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{-8x}{4+x^2}$
   a) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und Nullstellen von f. Untersuchen Sie f auf Symmetrieen und Asymptoten. Zeichnen Sie den Graphen von f.



   Der Nenner 4+x^2 ist immer größer als Null, also keine Definitionslücken, bzw. senkrechten Asymptoten $D = \mathbb{R}$
   Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der des Nennerpolynoms, also ist die x-Achse waagerechte Asymptote :

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{-8x}{4+x^2} == 0$$

   Der Zähler ist eine punktsymmetrische Funktion (ungerader Exponent), der Nenner ist eine achsensymmetrische Funktion (nur gerade Exponenten), also ist f eine punktsymmetrische Funktion :

$$f(-x) = -f(x)$$

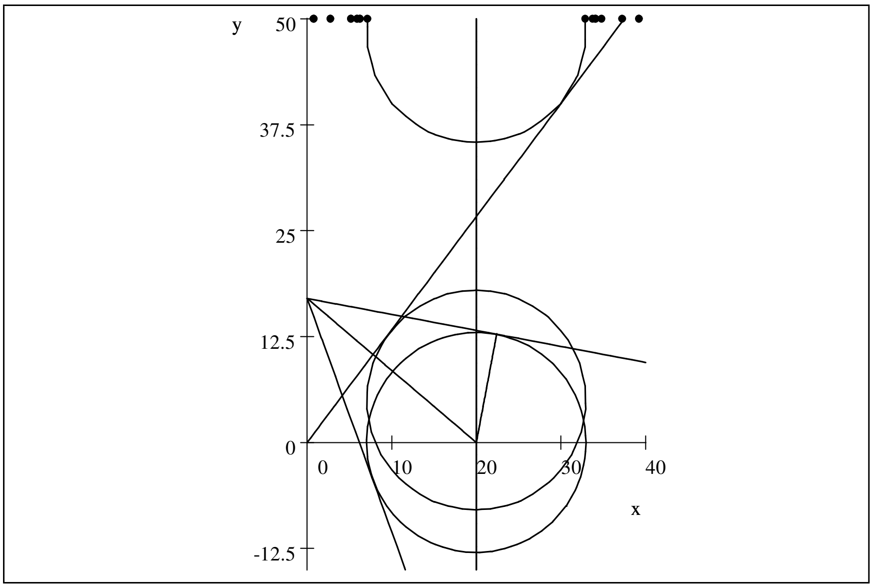
   Nullstellen :

$$x = 0$$

   Nachweis und Art der Extrema : Der Nenner der Ableitung ist stets positiv, der Zähler faktorisiert in 8(x+2)(x-2). Bei x=+2 findet ein Vorzeichenwechsel vom Negativen ins Positive statt, also ein Minimum (2|-2), aufgrund der Symmetrie ist (-2|2) ein Maximum.
   b) $WP_1\,(0|0)\,; WP_{2/3}\,\left(\pm 2\sqrt{3}\,|\mp\sqrt{3}\right)$
   Der Nenner von f" ist stets positiv. Der Zähler faktorisiert in einfache Nullstellen, die also alle Vorzeichenwechsel haben und somit Wendepunkte sind. Der mittlere Wendepunkt (0|0) liegt im Symmetriezentrum von f. Die anderen beiden liegen zueinander punktsymmetrisch. Somit liegen sie auf einer Ursprungsgeraden mit der Steigung $\frac{-\sqrt{3}-0}{2\sqrt{3}-0} = -\frac{1}{2}$
   $g : y = -\frac{1}{2}x$
2. Gegeben ist der Kreis k mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 40x + 231 = 0$.
   a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt sowie den Radius von k.

$$(x-20)^2 + (y-0)^2 = 169 = 13^2$$

   Der Kreis hat den Mittelpunkt (20|0) und den Radius 13.
   b) Vom Punkt P(0|17) werden die Tangenten an k gelegt. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Tangenten.



Der halbe Winkel zwischen den Tangenten ergibt sich aus dem Abstand PM und R :

$$\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{R}{MP} \\ \sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{53}\sqrt{689} \\ \alpha &= 59,374° \end{aligned}$$

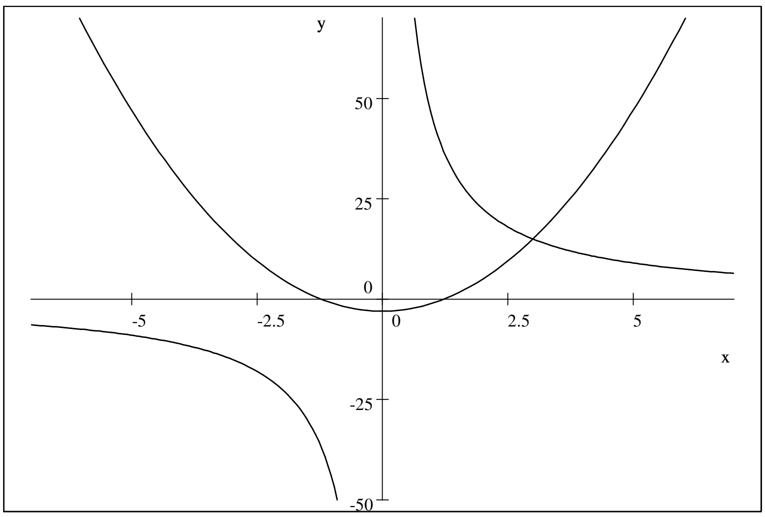
c) Um wie viel ist k parallel zur y-Achse zu verschieben, damit der verschobene Kreis die Gerade 4x-3y=0 berührt ? Gesucht sind (Mittel) Punkte, mit der x-Koordinate 20 (Verschiebung parallel zu y) und dem Abstand 13 (Radius) zu g. Lösung z.B. über die Hesseform von g :

$$\frac{4x-3y}{5} = 0$$

Der Betrag der linken Seite der Gleichung liefert für jeden Punkt den Abstand zu g :

$$\begin{aligned} y_+ &= 5 \\ y_- &= \frac{145}{3} \end{aligned}$$

3. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2x^2 - 3$.
   a) Gesucht sind die Koordinaten der Schnittpunkte von f mit der Kurve $y = \frac{45}{x}$



Bei der Gleichung dritten Grades muss eine Lösung als Teiler des konstanten Gliedes geraten werden :

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \qquad |\text{diese Lösung herausdividieren} \\ \left(2x^3 - 3x - 45\right) &: \quad (x-3) = 6x + 2x^2 + 15 \\ D &= 4 - 4 \cdot 6 \cdot 15 < 0 \text{ also keine weiteren Lösungen} \end{aligned}$$

Schnittpunkt ist S(3|15)

b) Gesucht sind die Gleichungen aller Funktionen g, deren zweite Ableitung f ergibt. Bestimmen Sie zudem die Gleichung von g so, dass der Graf von g die x-Achse berührt und symmetrisch zur y-Achse verläuft.

$$\begin{aligned} \int \left(2x^2 - 3\right) dx &= \frac{2}{3}x^3 - 3x + a \\ \int \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x + a\right) dx &= \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + ax + b \end{aligned}$$

Dies wären alle Funktionen deren zweite Ableitung f ergibt.
Da g zudem symmetrisch zur y-Achse verlaufen soll, muss a=0 sein, da nur gerade Exponenten vorkommen dürfen.
$g(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + b$ soll überdies die x-Achse berühren, d.h. als Nullstellen kommt entweder eine vierfache, zwei doppelte oder eine doppelte und zwei einfache in Frage.

b=0, also $g(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ =$\frac{1}{6}x^2\left(x-3\right)\left(x+3\right)$ liefert eine doppelte Nullstelle bei 0 und zwei einfache bei ± 3.

alternativ muss die Determinante von $g(x) = 0$ Null sein, also :$b = \frac{27}{8}$

4. Wie gross ist die WS mit 5 Spielwürfeln mindestens 4 Sechser zu werfen ?

$$\text{WS(mindestens 4 Sechser)} = \frac{203}{23\,328} = 0,87\%$$

a) In einer Urne hat es gelbe und blaue Kugeln. Die WS eine gelbe Kugel zu ziehen, beträgt 0,3. Die Wahrscheinlickeit, dass zwei gleichzeitig herausgenommene Kugeln blau sind, beträgt $\frac{217}{445}$.
Wie viele Kugeln befinden sich in der Urne ?

Anzahl gelbe Kugeln x, Anzahl blaue Kugeln y.

$$\begin{aligned} \text{WS(zwei gleichzeitig gezogene Kugeln sind blau)} &= \text{WS(blau beim ersten Ziehen) WS(blau beim zweiten Ziehen)} \\ I.\text{WS(zwei blaue)} &= \frac{y}{x+y} \cdot \frac{y-1}{x+y-1} = \frac{217}{445} \\ II.\text{WS (eine gelbe)} &= \frac{x}{x+y} = \frac{3}{10} \Longrightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{7}{10} \\ I.\frac{7}{10}\frac{y-1}{x+y-1} &= \frac{217}{445} \\ x &= 27 \\ y &= 63 \end{aligned}$$

Es sind also 90 Kugeln.

b) Eine Münze sei fair. Wie oft muss man die Münze werfen, damit man mit einer WS von 99,99% mindestens einmal Zahl geworfen hat ?

$$n \geq 14$$

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) f sei der Graph der Funktion $f(x) = e^{ax}, a > 0$ konstant, e=Eulersche Zahl.
f^{-1}sei der Graph der Umkehrfunktion von f. Wie ist a zu wählen, damit sich f und f^{-1} berühren?
Wenn sich die beiden berühren, dann auf der Winkelhalbierenden g: y=x, die ebenfalls berührt wird.
Berührung bedeutet in Funktionswert und Steigung übereinzustimmen.

$$\begin{aligned} e &= x \\ a &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

b) Gegeben sind die Punkte A(2|-4|1) und B(-2|0|-3). M sei die Menge aller Punkte P in der xy-Ebene, so dass $\overrightarrow{PA}$ auf $\overrightarrow{PB}$ senkrecht steht. Zeigen Sie , dass M ein Kreis ist und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
P in xy-Ebene, also P(x|y|0)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4y - 7 &= 0 \\ (x-0)^2 + (y+2)^2 &= 11 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt M(0|-2) und Radius $\sqrt{11}$.
Sein Flächeninhalt ist 11π.

c) g sei der Graph der Funktion $g(x) = a\sin(bx)$ im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{b}$.
Wie sind a und b zu wählen, damit g die Gerade y=2 berührt und mit der x-Achse ein Flächenstück einschliesst, dessen Inhalt 6 ist ?

y=2 berühren, bedeutet a=2, da a die Amplitude des Sinus ist.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{b}} 2\sin(bx)dx &= 6 \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

d) Gegeben sind die Punkte A(1|2|3), B(5|4|7) und C(3|0|11).
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte D so, dass $\overrightarrow{AD}$ sowohl auf $\overrightarrow{AB}$, als auch auf $\overrightarrow{AC}$ senkrecht steht und $\overrightarrow{AD}$ gleich lang ist wie $\overrightarrow{AB}$.
Die direkte Lösung über die Skalarprodukte führt auf längliche quadratische Gleichungssysteme, daher die kürzere Lösung über das Vektorprodukt :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{n} \quad \overrightarrow{\text{n}} \text{ steht senkrecht sowohl auf } \overrightarrow{AB} \text{ als auch } \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{n} &= \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ n &= 36 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} = 6$

Da $\overrightarrow{n}$ 6 mal so lang ist wie $\overrightarrow{AB}$ ist $\overrightarrow{AD}$ entweder gleich $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder gleich $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D ergibt sich somit zu

$$\overrightarrow{r_{D_2}} = \overrightarrow{r_A} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_{D_2}} = \overrightarrow{r_A} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$