

Welches Taschenrechnermodell verwenden Sie?

(Diese Angabe ist freiwillig und wird bei der Bewertung der Prüfung nicht berücksichtigt!)

Mathematik

Normales Niveau

Dauer: 4 Stunden

Jede Aufgabe wird mit je maximal 12 Punkten bewertet.
Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Gegeben sind die Kurven $K_1: y = \frac{a^2}{x^2}$ und $K_2: y = 2 \cdot \sqrt{x}$.
 - a) Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass $S(4 / ?)$ Schnittpunkt der beiden Kurven wird.
 - b) Skizzieren Sie die beiden Kurven in einem Koordinatensystem.
 - c) Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Kurven in S .
 - d) Die beiden Kurven und die Geraden $x = 1$ und $x = 9$ umranden ein zweiteiliges, endliches Flächenstück. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt exakt.

2. Lösen Sie die zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben:
 - 2.1. Bestimmen Sie in der Kreisgleichung $x^2 + 2x + y^2 - 4y + k = 0$ die Konstante k so, dass der Kreis die durch $A(1 / 13)$ und $B(-7 / 19)$ bestimmte Gerade berührt. Geben Sie ausserdem Mittelpunkt und Radius des Kreises an.
 - 2.2. Gegeben sind die Punkte $A(2 / -1 / 4)$, $B(6 / 7 / 12)$, $C(1 / 3 / 14)$ und $D(-1 / -1 / 10)$. Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez (Achsentrapez) ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes und den spitzen Winkel unter dem sich die Diagonalen schneiden.

3. Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck $A(-1 / 0)$, $B(1 / 0)$ und $C(0 / 2)$. Der Punkt P liege auf der y -Achse und nicht ausserhalb des Dreiecks.

Wie muss P gewählt werden, damit die Summe der Abstände von P zu den drei Eckpunkten A , B , C minimal ist? Für welchen Punkt P ist die Summe maximal?

4. Lösen Sie die zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben:
- 4.1. In einem regelmässigen 5-Eck ist der Umkreisradius um 1 cm länger als der Inkreisradius. Berechnen Sie die Seitenlänge und den Flächeninhalt dieses 5-Ecks.
- 4.2. Banken und Post verwenden zur Sicherung ihrer Kreditkarten eine PIN ("personal identification number"). Jeder Kartenträger sucht sich eine 4-stellige PIN aus.
- a) Es hat sich herausgestellt, dass die Benutzer für ihre PIN die Ziffern 0,1,2,3,4,5 häufiger wählen als die Ziffern 6,7,8,9. Die einzelnen Ziffern 0,1,2,3,4,5 sollen gleich häufig gewählt werden, ebenso die Ziffern 6,7,8,9. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Ziffern vorkommen, wenn der Anteil von 0,1,2,3,4,5 insgesamt 75% betragen soll?
- b) Sie wollen meine PIN durch Erraten der 4 Ziffern knacken und gehen jetzt von der richtigen Annahme aus, dass ich nur die Ziffern 0,1,2,3,4,5 verwendet habe.
- i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erraten Sie im ersten Versuch meine PIN?
- ii) Nach drei Fehlversuchen wird eine Karte eingezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können Sie unter diesen Umständen meine PIN knacken?
5. Für jedes $a > 0$ (a konstant) definiert die Gleichung $y = x \cdot e^{1-a \cdot x}$ eine Kurve K .
- a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und den Hochpunkt H in Abhängigkeit von a . Skizzieren Sie K für $a = 1$.
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W in Abhängigkeit von a und geben Sie die Gleichung der Wendetangente an.
- c) Bei jeder Kurve wird der Hochpunkt mit dem Wendepunkt durch eine Gerade verbunden. Zeigen Sie, dass alle diese Verbindungsgeraden parallel sind.