Matur Mathematik Grundlagenfach Herbst 2006

1.

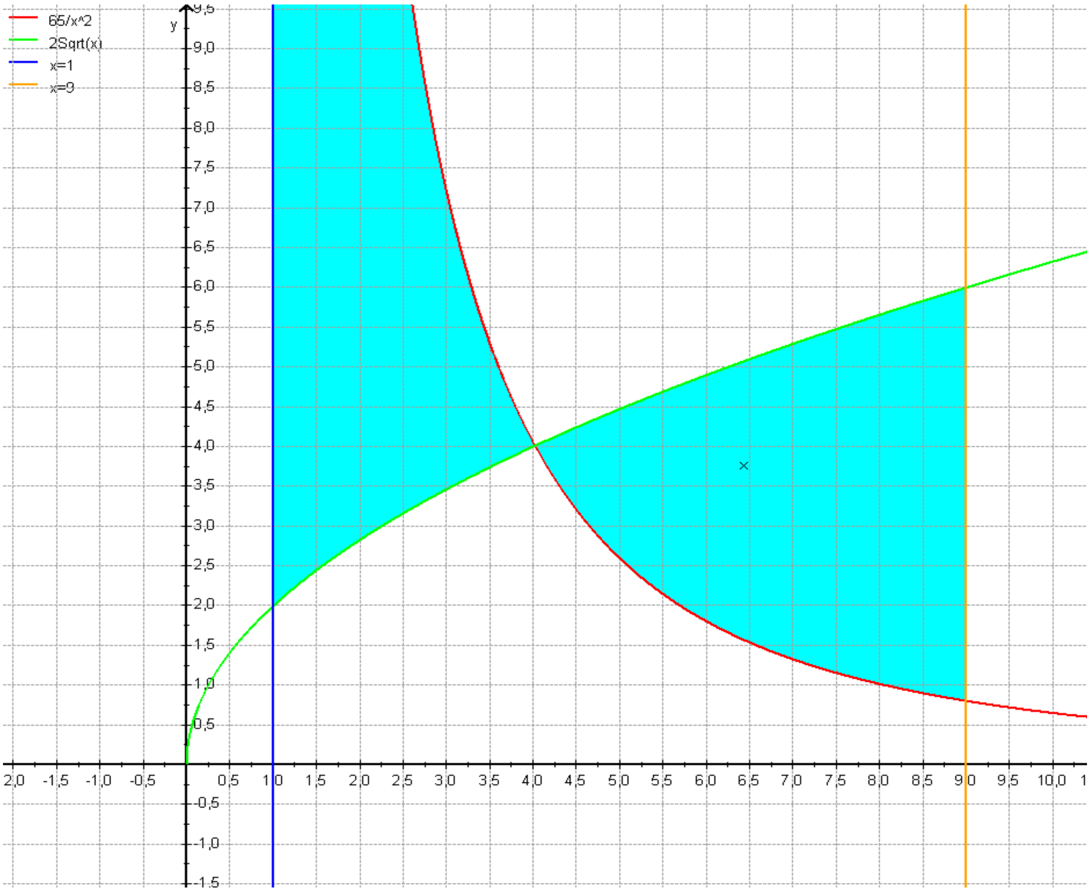
a)

$$\frac{a^2}{4^2} = 2\sqrt{4}$$

$$a = 8$$

$$S(4|4)$$

b)



c)

$$K_1' = \frac{-128}{x^3}$$

$$K_2' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$K_1'(4) = -2 = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = -63{,}43\,°$$

$$K_2'(4) = \frac{1}{2} = \tan\beta \Rightarrow \beta = 26{,}57\,°$$

$$\phi = |\alpha - \beta| = 90\,°$$

Dies gilt auch exakt, da $K_1'(4) * K_2'(4) = -1$ ist

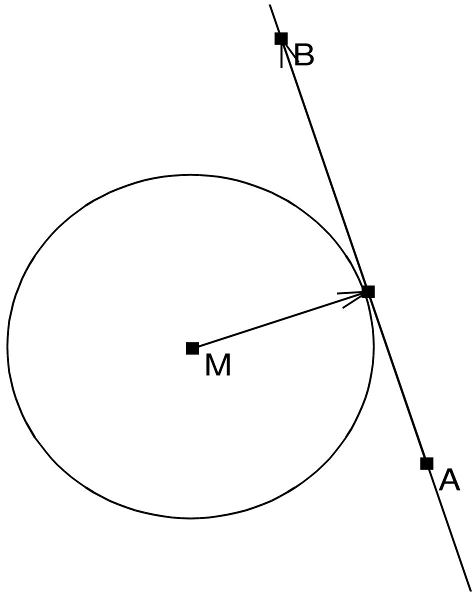
d)

$$A_1 = \int_1^4 \left(\frac{64}{x^2} - 2\sqrt{x}\right)dx = \left[-\frac{64}{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{116}{3} = 38.667$$

$$A_1 = -\int_4^9 \left(\frac{64}{x^2} - 2\sqrt{x}\right)dx = -\left[-\frac{64}{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 = \frac{148}{9} = 16.444$$

$$\underline{\underline{A = \frac{496}{9}}} = 55.111$$

2.



$$x^2+2x+y^2-4y+k=0$$

quadratische Ergänzung

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4=1+4-k$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=5-k$$
$$M(-1|2)$$

Der Abstand von M zur Geraden AB ist zugleich der Radius :

Gerade in Hesseform,
M einsetzen,
ergibt R.

$$y=m(x-x_0)+y_0$$
$$y=\frac{-3}{4}(x-1)+13$$
$$3x+4y-55=0$$
$$\frac{3x+4y-55}{\sqrt{3^2+4^2}}=0$$
$$\frac{3x+4y-55}{5}=0$$

M einsetzen :

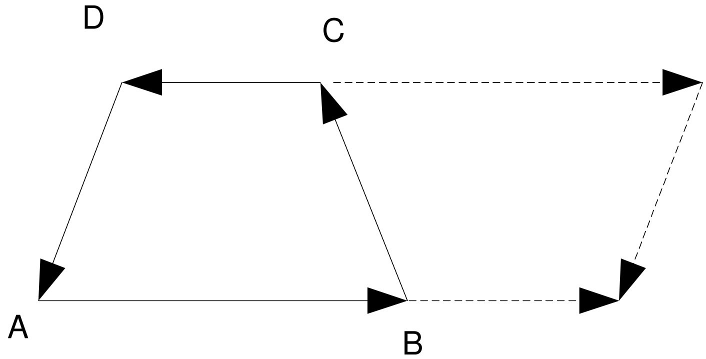
$$\frac{3\cdot(-1)+4\cdot 2-55}{5}=10=R$$
$$5-k=R^2$$
$$k=-95$$

2.

Gleichschenkliges Trapez bedeutet : AB parallel DC (also ein Vielfaches) und AD=BC :

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$$

also $\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{DC}$



$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\2\end{pmatrix}$$
$$BC=\sqrt{25+16+4}=\sqrt{45}$$
$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}$$
$$AD=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

also BC=AD
Man ergänzt das Trapez durch eine zweite, auf den Kopf gestellte Version seiner selbst zu einem Parallelogramm und berechnet dessen Fläche als Betrag des Vektorprodukts der aufspannenden Seiten. Das Trapez ist dann die Hälfte davon :

$$A=\frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\times\overrightarrow{AD}\right|$$

$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}6\\12\\12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}\right|$$

$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}72\\-72\\36\end{pmatrix}\right|$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\right|$$

$$A=18\cdot\sqrt{4+4+1}=54$$

$$\cos\phi=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{AC\,BD}$$

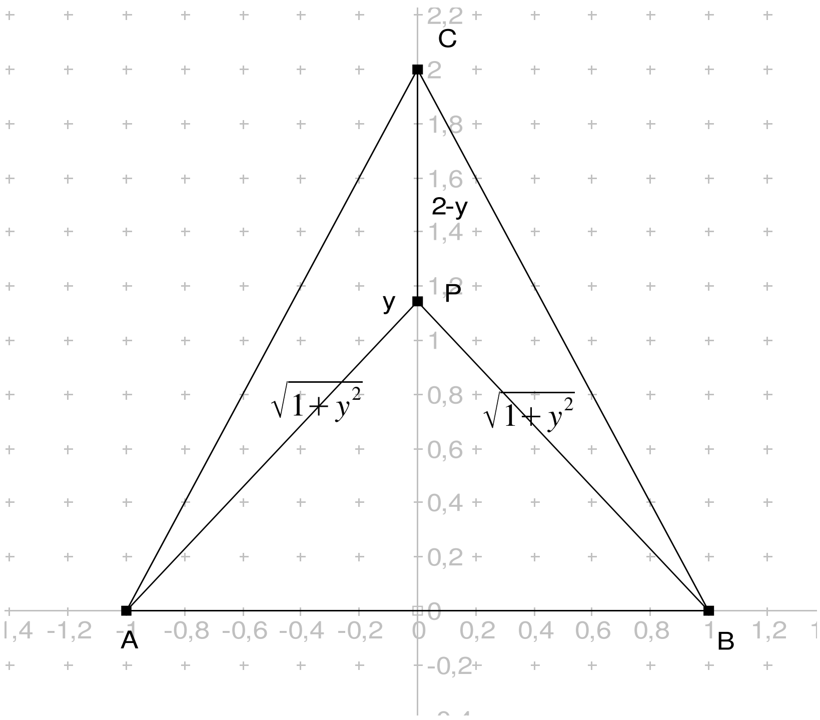
$$\cos\phi=\frac{\begin{pmatrix}-1\\4\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-8\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{1+16+100}\sqrt{49+64+4}}$$

$$\cos\phi=\frac{7-32-20}{\sqrt{117}\sqrt{117}}$$

$$\cos\phi=\frac{-45}{117}$$

$$\phi^{*}=67{,}38^{\circ}$$

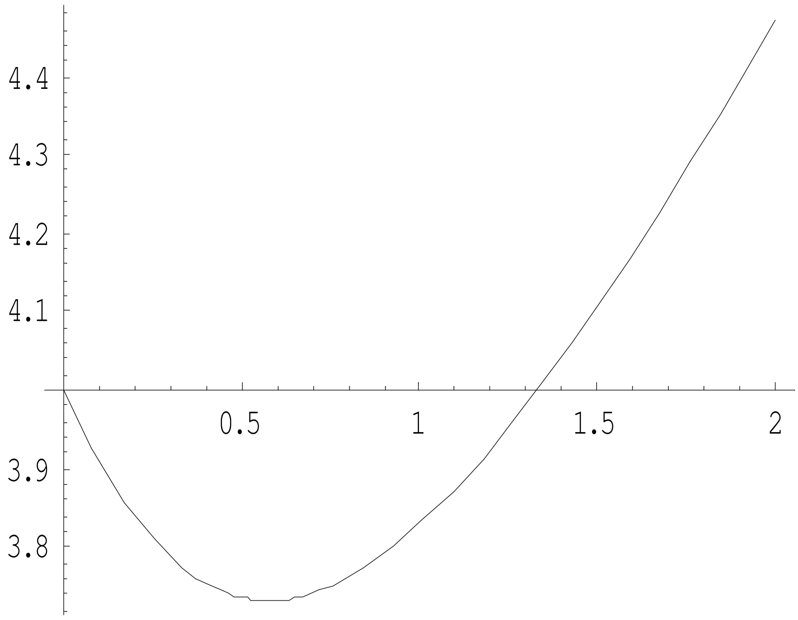
3.



$$s = 2 - y + 2 \cdot \sqrt{1+y^2}$$
$$s' = -1 + 2\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = 0$$
$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$$

$$s'(0{,}1) = -0{,}8 < 0$$
$$s'(1) = 0{,}41 > 0$$
also Minimum bei $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$$s\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73$$

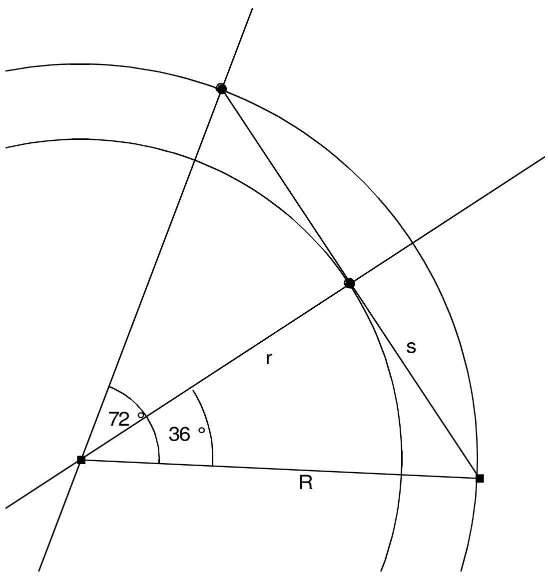
Randwerte
$$s(0) = 4$$
$$s(2) = 2\sqrt{5} = 4{,}47$$
also Maximum bei $y = 2$



4.1.
Mittelpunktswinkel des Bestimmungsdreiecks :

$$\phi = \frac{360^\circ}{5} = 72\,°$$
$$R = r + 1$$
$$r = R\cos 36^\circ$$

$$R = R\cos 36^\circ + 1$$
$$R(1 - \cos 36^\circ) = 1$$
$$R = \frac{1}{1-\cos 36^\circ} = \frac{4}{3-\sqrt{5}} = 5{,}24$$
$$r = \frac{\cos 36^\circ}{1-\cos 36^\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = 4{,}24$$
$$s = R\sin 36^\circ \cdot 2 = 6{,}16$$
$$A = \frac{5 \cdot 1}{2}\, s \cdot r = 65{,}25$$



4.2
a)

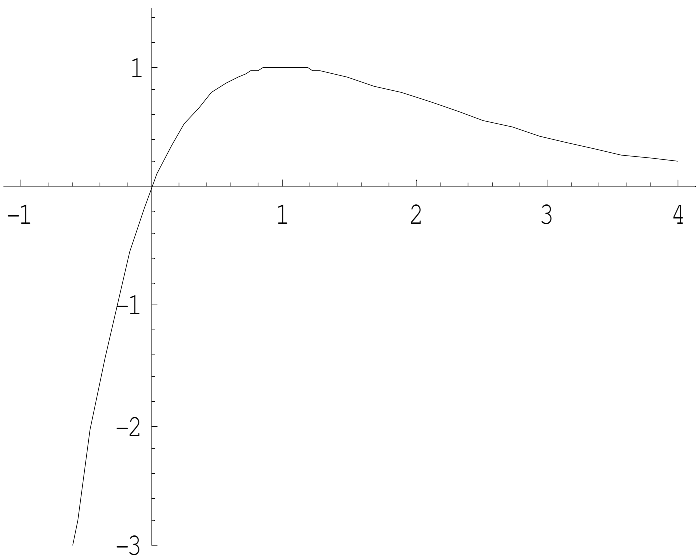
0-5 (6 Stück) : 75%, also jede einzelne 75%:6=12,5%
6-9 (4 Stück): 100%-75%=25%, also jede einzelne 25%:4=6,25%
b)

i) die WS die erste Ziffer richtig zu erwischen ist 1:6, also 1/6, ebenso beim zweiten,dritten und vierten Mal, insgesamt also $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296} = 0{,}077\,\%$
ii) Beim ersten Versuch sind noch 1296 Zahlen möglich, dann noch 1295, dann noch 1294, insgesamt also (Baumdiagramm) :

$$\frac{1}{1296}+\frac{1295}{1296}\cdot\frac{1}{1295}+\frac{1295}{1296}\cdot\frac{1294}{1295}\cdot\frac{1}{1294}=\frac{3}{1296}=0{,}23\,\%$$

5.

a)



$$f(x)=0$$
$$x\cdot e^{1-x}=0$$
$$x=0$$

Sowohl x-, wie y-Achsenschnittpunkt

$$f'(x)=(1-ax)e^{1-ax}$$
$$(1-ax)e^{1-ax}=0$$
$$x=\frac{1}{a}$$
$$f''(x)=(a^2x-2a)e^{1-ax}$$
$$f''\left(\frac{1}{a}\right)=-a<0$$

also Maximum bei $x=\frac{1}{a}$ und $y=\frac{1}{a}$

$$Max\left(\frac{1}{a}\middle|\frac{1}{a}\right)$$

b)

$$f''(x)=(a^2x-2a)e^{1-ax}$$
$$(a^2x-2a)e^{1-ax}=0$$
$$x=\frac{2}{a}$$

$$f'''(x)=(3a^2-a^2x)e^{(1-ax)}$$
$$f'''\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{a^2}{e}\neq 0$$

Also Wendepunkt bei $x=\frac{2}{a}$ und $y=\frac{2}{ae}$

$$\mathrm{WP}\left(\frac{2}{a}\middle|\frac{2}{ae}\right)$$

$$f'\left(\frac{2}{a}\right)=-\frac{1}{e}$$
$$t: y=m(x-x_0)+y_0$$
$$y=-\frac{1}{e}\left(x-\frac{2}{a}\right)+\frac{2}{ae}$$
$$y=-\frac{1}{e}x+\frac{4}{ae}$$

c)

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{a}-\frac{1}{a}}{\frac{2}{ae}-\frac{1}{a}}=\frac{2-1}{\frac{2}{e}-1}=\frac{e}{2-e}$$

Da dies unabhängig von a ist, erhält man für jedes a die gleiche Steigung, also sind alle Verbindungsgeraden vom Max zum WP parallel.