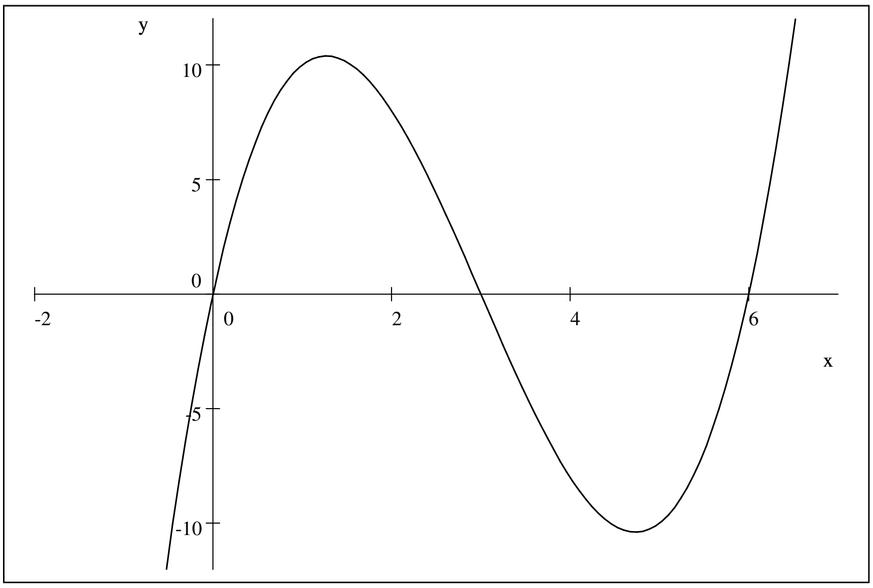
Herbst 2007

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + ax^2 + 18x$, a konstant.
   a) Berechnen Sie für den Spezialfall a=-9 die Nullstellen und die Koordinaten der Extremalpunkte von f. Zeichnen Sie den Graphen.



   Nullstellen $x = 0, 3, 6$
   $Max\left(3-\sqrt{3}\,|6\sqrt{3}\right)$; $Min\left(3+\sqrt{3}\,|-6\sqrt{3}\right)$

   b) Sei a wieder beliebig.

   b_1W(2|y$_w$) seid der Wendepunkt von f. Berechnen Sie a und y$_w$:
   Da die dritte Ableitung immer ungleich Null ist, ist eine Nullstelle der zweiten Ableitung immer ein Wendepunkt :
   $a = -6; y_w = 20$
   b_2N(-3|0) sei eine Nullstelle von f. Berechnen Sie a sowie den Schnittwinkel von f mit der x-Achse in N.
   $a = 9; \alpha = -83.658° = 96.34°$

2. Bei einem gefälschten Spielwürfel wurde die Augenzahl 2 durch eine zusätzliche 6 ersetzt.
   a) Wie gross ist die WS, dass mit zwei solchen gefälschten Würfeln mindestens die Augensumme 11 geworfen wird ?
   WS(Augensumme mindestens 11)=$\frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{9} = 22,2\%$

   b) Wie gross ist die WS, dass bei 10-maligem Werfen eines solchen gefälschten Würfels genau 3 Mal höchstens eine 3 geworfen wird?
   WS(bei 10 mal Werfen genau 3 Mal höchstens eine 3)= $\frac{5120}{19\,683} = 26,0\,1\%$

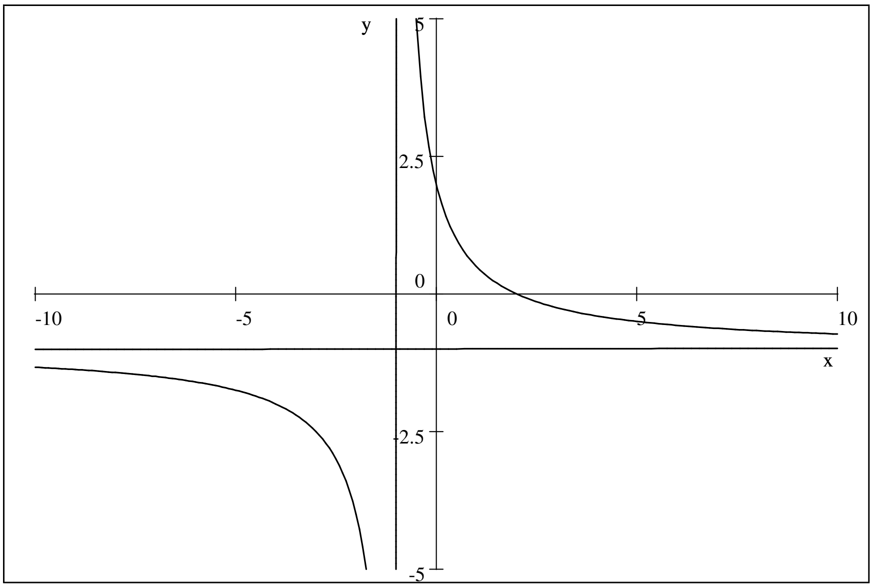
   c) Wie viele solcher gefälschten Würfel müssen gleichzeitig geworfen werden, damit die WS, dass alle Würfel mindestens die Augenzahl 4 zeigen, kleiner ist als 1%
   $n \geq 12$

   d) 60 Würfe mit dem gefälschten Würfel ergaben folgende Verteilung :

Augenzahl x	1	3	4	5	6
Anzahl Würfe mit Augenzahl x	11	9	8	10	22

   Berechnen Sie für diese Verteilung den Mittelwert und die empirische Standardabweichung von x.
   $\overline{x} = \frac{252}{60} = \frac{21}{5} = 4.2; \sigma^2_{emp} = 3.450\,8$

3. Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{2-x}{1+x}$
   a) $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, Polstelle bei x=-1, also senkrechte Asymptote $x = -1$



Nullstelle : x=2

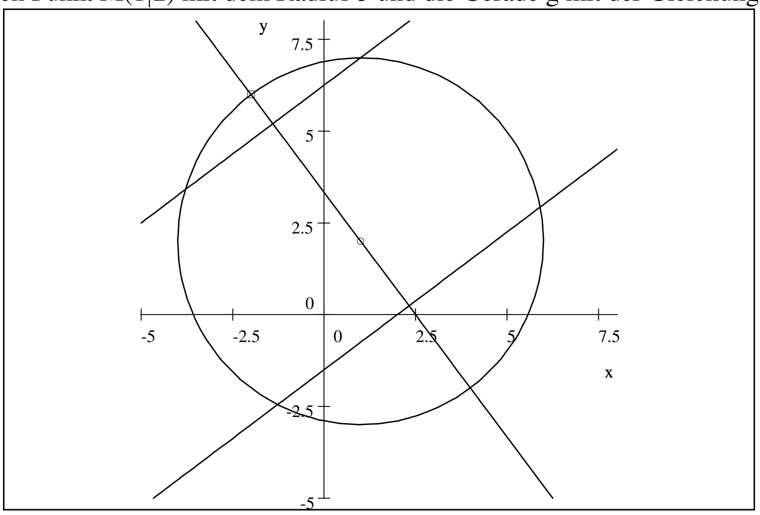
$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2-x}{1+x} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0} - 1}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + 1} = -1$$

waagerechte Asymptote bei $y = -1$

Keine Schnittpunkte mit den Asymptoten.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion G mit der Gleichung $y = 3\ln(x+1) - x$ eine Stammfunktion von g ist. Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, welches von g und den positiven Koordinatenachsen begrenzt wird.
Als Stammfunktion muss g die Ableitung von G sein : $y' = \frac{2-x}{x+1} = g(x)$. Also ist G eine Stammfunktion von g.
Die Fläche erhält man mit : $A = \int\limits_0^2 g(x)dx = [G(x)]_0^2 = 3\ln 3 - 2$

4. Gegeben sind der Kreis k um den Punkt M(1|2) mit dem Radius 5 und die Gerade g mit der Gleichung $3x - 4y = 6$.



a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P auf k, welcher den grössten Abstand zu g hat.
Aus der Geometrie ist klar, dass der gesuchte Punkt auf einer Normalen zu g durch M liegt : $n : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

schneiden mit k :

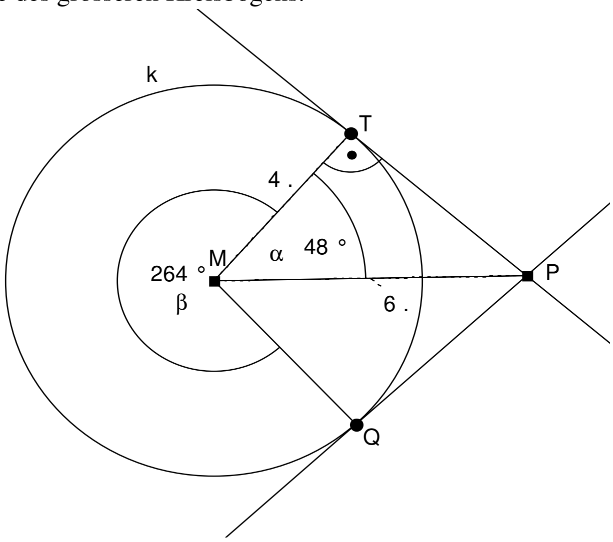
$$\overrightarrow{X}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P(-2|6) hat den grössten Abstand von g und liegt auf k.

b) Eine zu g parallele Gerade g schneidet k so, dass das herausgeschnittene Sehnenstück s die Länge 6 hat. Berechnen Sie den Abstand d von M zu f. Bestimmen Sie die Gleichung von f.
Nach Pythagoras ist klar, dass sich d zu $d^2 = r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 : d = 4$
Da f parallel zu g sein soll ist : $f : 3x - 4y + c = 0$
Der Abstand kann z.B. über die Hesse-Normalform bestimmt werden und liefert c=25.

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben :
   a) Vom Rechteck ABCD sind die Punkte B(-1|2|4) und C(1|4|5) gegeben. A liegt auf der x-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von A und D.
   $A(x|0|0)$; rechter Winkel bedeutet Skalarprodukt 0: $A(3|0|0)$; $D(5|2|1)$

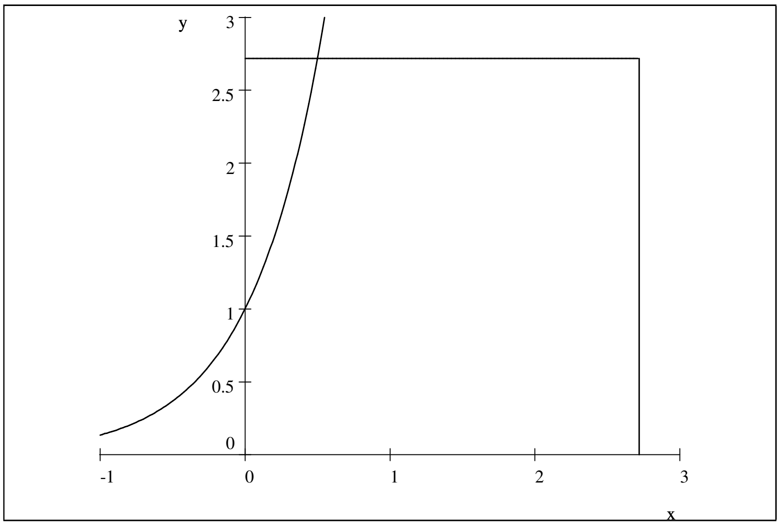
   b) Gegeben sind ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 4 sowie ein Punkt P, welcher von M den Abstand 6 hat. Von P werden die beiden Tangenten an k gelegt. Die so enstehenden Berührpunkte auf k teilen diesen in zwei verschieden lange Kreisbogen. Berechnen Sie die Länge des grösseren Kreisbogens.



Die Länge b des Bogens $\frown TQ$ erhält man über die Proportionalität von β und dem Kreisumfang :

$$\alpha = 48.189°$$
$$b = 18.40$$

   c) Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit A(0|0) und C(c|c), wobei c>1. Wie ist c zu wählen, damit die Kurve $y = e^{2x}$ aus dem Quadrat ein Flächenstück mit Flächeninhalt 0.5 abschneidet ?
   Das Flächenstück 0.5 ergibt sich aus dem Integral über die Differenz von e^{2x} und $y = c$ im Bereich von 0 bis zum Schnittpunkt von $y = e^{2x}$ und $y = c$



Schnittpunkt : $x = \frac{1}{2} \ln c$; $A = \frac{1}{2}$; A durch Integral ausdrücken liefert $c = e$.

d) Eine Population besteht aus 70% weiblichen und 30% männlichen Mitgliedern. 5% aller männlichen und 3% aller weiblichen Mitlglieder der Population tragen ein bestimmtes Merkmal. Aus den Mitgliedern, welche dieses Merkmal nicht tragen, wird eines zufällig ausgewählt. Wie gross ist die WS, dass dieses Mitglied weiblich ist?
WS(Merkmal nicht tragend)=$0.7 \cdot 0.97 + 0.3 \cdot 0.95 = 0.964$
WS(Merkmal nicht tragend und weiblich)=$0.7 \cdot 0.97 = 0.679$
WS(weiblich unter den Nicht-Merkmals Trägern)=$\frac{0.679}{0.964} = 0.704\,36 = 70\%$