

---

# Mathematik

## Normales Niveau

Dauer: 4 Stunden

Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $\pi$ , etc. stehen.

Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben, so runden Sie auf 3 signifikante Ziffern.

Jede Aufgabe wird mit je maximal 12 Punkten bewertet.

Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

---

1. Gegeben ist die Kurve  $y = 2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 + c$ .  $c \in \mathbb{R}$

- a) Zeigen Sie, dass die Kurve für alle Werte von  $c$  symmetrisch zur  $y$ -Achse ist.
- b) Bestimmen Sie  $c \neq 0$  so, dass die Kurve die  $x$ -Achse berührt.

(Falls Sie  $c$  nicht bestimmen können, rechnen Sie mit dem Wert  $c = -5$  weiter.)

- c) Geben Sie für den in b) berechneten Wert für  $c$  die Extrempunkte und die Nullstellen der Kurve an. Skizzieren Sie die Kurve.
- d) Berechnen Sie für den in b) berechneten Wert für  $c$  den Inhalt der Fläche, welche von der Kurve und der  $x$ -Achse begrenzt wird, exakt.

2. Gegeben ist der Kreis  $K: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ .

- a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises  $K$ .
  - b) Legen Sie vom Nullpunkt aus die Tangenten an den Kreis  $K$ . Geben Sie die Gleichungen und die Berührungspunkte an.
  - c) Die in b) bestimmten Tangenten und der kürzere Kreisbogen begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.
  - d) Geben Sie den Radius des grössten Kreises an, den Sie in das in c) beschriebene Flächenstück einzeichnen können.
-

3. Sie haben einen normalen Spielwürfel und einen Gefälschten. Beim gefälschten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu werfen  $P(6)=\frac{1}{3}$ , diejenige eine 1 zu werfen  $P(1)=\frac{1}{12}$ . Ferner gilt:  $P(2)=P(3)=P(4)=P(5)$ .
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit dem gefälschten Würfel die Augenzahl 3?
  - Sie wählen zufällig einen der beiden Würfel aus und werfen ihn zweimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der Augenzahlen (Augensumme) 2?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit dem normalen Spielwürfel in drei Würfeln die Augensumme 15?
  - Sie werfen den normalen Spielwürfel so oft, bis eine Augenzahl zum zweiten Mal erschienen ist. Dann hören Sie auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werfen Sie genau viermal?
  - Nun wählen Sie zufällig einen der beiden Würfel aus und werfen ihn sechsmal. Sie staunen: Fünfmal haben Sie die 6 geworfen. Sicher denken Sie nun, dass Sie den gefälschten Würfel geworfen haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit irren Sie sich?
4. Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung  $y = e^x \cdot \left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)$ .
- Bestimmen Sie die Nullstelle, den Extrempunkt und den Wendepunkt der Kurve. Fertigen Sie eine Skizze der Kurve an.
  - Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt der Kurve.
  - Diese Tangente, die Kurve und die x-Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.
5. Die folgenden beiden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.
- 5.1. Gegeben sind die Punkte A(1, 2, -2), B(-9, -8, 3) und C(4, -4, -8).
- Berechnen Sie alle Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
  - Liegt der Punkt P(-1, 0, -1) auf der Geraden AB?
  - Liegt der Punkt Q(-7, -18, -4) in der Ebene des Dreiecks ABC?
- 5.2. Ein etwas exzentrischer Gärtner möchte ein kreisförmiges und ein quadratisches Blumenbeet mit einem Zaun umzäunen. Es steht im 100 m Zaun zur Verfügung. Bestimmen Sie den Radius r des kreisförmigen Blumenbeetes und die Seitenlänge a des quadratischen Blumenbeetes so, dass die Fläche der beiden Blumenbeete zusammen
- maximal ist.
  - minimal ist.