Herbst 2008

1. Gegeben ist die Kurve $y = 2x^4 - 3x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}$

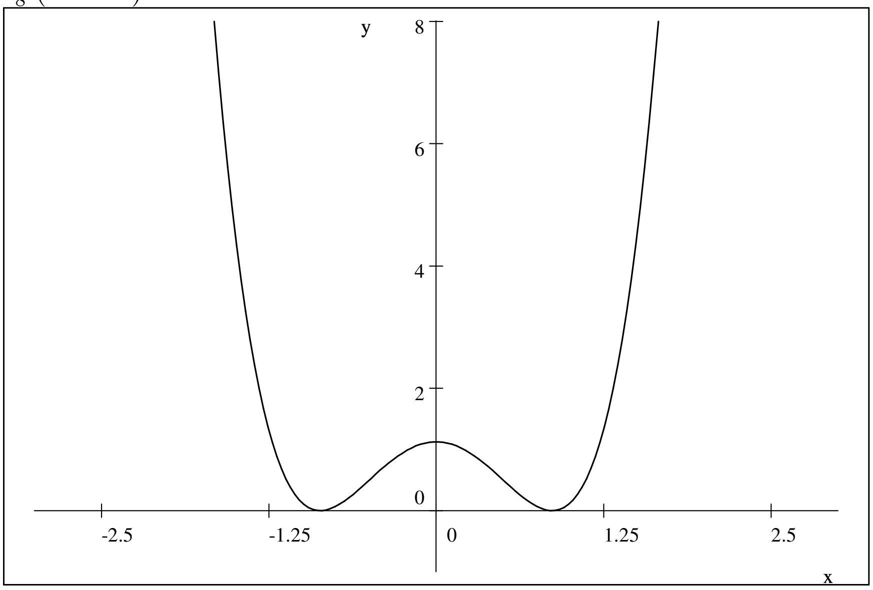
   a) Zeigen Sie, dass die Kurve für alle Werte von c symmetrisch zur y-Achse ist.
   Achsensymmetrie zur y-Achse bedeutet $f(-x) = f(x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^4 - 3(-x)^2 + c \\ f(-x) &= 2x^4 - 3x^2 + c = f(x) \end{aligned}$$

   b) Bestimme Sie $c \neq 0$ so, dass die Kurve die x-Achse berührt.
   Berührung liegt bei einer doppelten oder vierfachen Nullstelle vor. Also muss die Diskriminante gleich Null sein.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x^4 - 3x^2 + c &= 0 \\ D = 9 - 8c &= 0 \\ c &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

   $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + \frac{9}{8} = \frac{1}{8}\left(4x^2 - 3\right)^2$



   Berührung bedeutet, dass die Kurve in ihrer Nullstelle auch die Steigung 0 aufweist.

$$\begin{aligned} f\prime(x) &= 8x^3 - 6x = 0 \\ x_1 &= 0, x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ f\left(x_{2/3}\right) &= 0 \\ 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + c &= 0 \\ c &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

   c) Geben Sie für den in b) berechneten Wert für c die Extremalpunkte und die Nullstellen der Kurve an. Skizzieren Sie die Kurve.
   Skizze s.o., NST s.o, Extrempunkte sind die Nullstellen und der Punkt (0|9/8).

   d) Berechnen Sie für den in b) berechneten Wert für c den Inhalt der Fläche, welche von der Kurve und der x-Achse begrenzt werden, exakt.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \left(2x^4 - 3x^2 + \frac{9}{8}\right) dx \\ A &= 2\left[\frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{9}{8}x\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{3}{5}\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Gegeben ist der Kreis $K: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$.

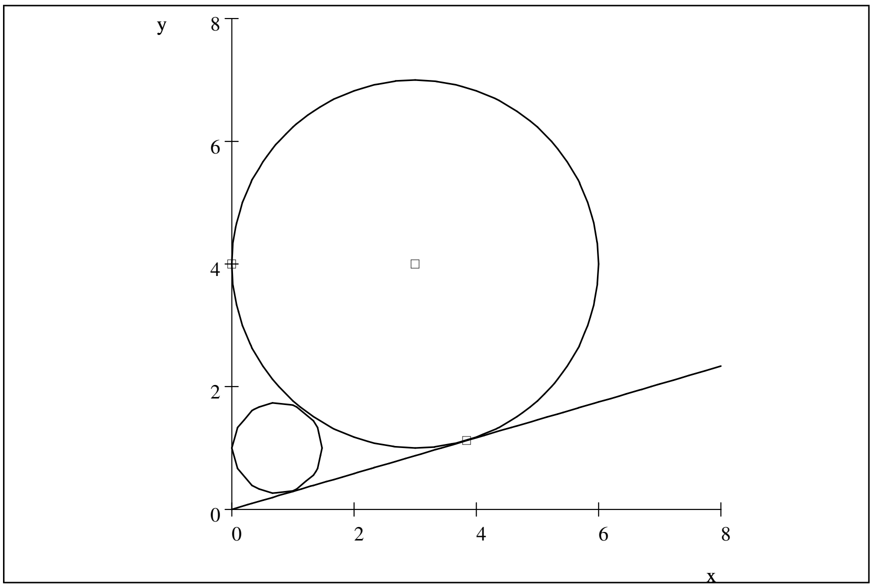
a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises K.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 &= 0 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= +9 \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 &= 9 \end{aligned}$$

Mittelpunkt ist M(3|4) und Radius ist R=3

b) Legen Sie vom Nullpunkt aus die Tangenten an den Kreis K. Geben Sie die Gleichungen und Berührpunkte an.

$$\begin{aligned} (x-3)(x-3) + (y-4)(y-4) &= 9 \\ -3(x-3) - 4(y-4) &= 9 \\ y &= -\frac{3}{4}x + 4 \\ \text{in Kreisgleichung} &: \\ (x-3)^2 + \left(-\frac{3}{4}x - 4 - 4\right)^2 &= 9 \\ x_1 &= 0, x_2 = \frac{96}{25} \\ y_1 &= 4, y_2 = \frac{28}{25} \\ t_1 &: x = 0 \\ t_2 &: y = \frac{7}{24}x \end{aligned}$$



c) Die in b) bestimmten Tangenten und der kürzere Kreisbogen begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

$$
\begin{aligned}
A_{\Delta 0T_1T_2} &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin\alpha \\
\tan\alpha^* &= \frac{7}{24} \\
\alpha* &= 16.260^\circ \Rightarrow \alpha = 73.74^\circ \\
A_{\Delta 0T_1T_2} &= 7,68 \\
\varphi &= 360^\circ - 2\cdot 90^\circ - \alpha = 106,26^\circ \\
A_{Seg} &= \frac{\varphi}{360^\circ} r^2\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin\varphi = 4.0256 \\
A &= A_{\Delta 0T_1T_2} - A_{Seg} = 3,6544
\end{aligned}
$$

d) Geben Sie den Radius des größten Kreises an, den Sie in das in c) beschriebene Flächenstück einzeichnen können.

$$
\begin{aligned}
m \text{ ist Mitte, r ist Radius des gesuchten Kreises} &: \\
\frac{Om}{OM} = \frac{Om + r}{OM + R} &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\
\text{Der Streckungsfaktor ist also 1/4, somit} &: \\
r &= \frac{1}{4}R = \frac{3}{4} \\
& m(3/4| - 1)
\end{aligned}
$$

3. Sie haben einen normalen Spielwürfel und einen Gefälschten. Beim gefälschten Würfel ist dei Wahrscheinlichkeit eine 6 zu werfen P(6)=1/3, diejenige eine 1 zu werfen P(1)=1/12. Ferner gilt P(2)=P(3)=P(4)=P(5).

a) Mit welcher WS wirft man mit den gefälschten Würfel die Augenzahl 3?

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} P_i &= 1 \\ 4P(2..5) + P(1) + P(6) &= 1 \\ P(2..5) &= \frac{1 - P(1) - P(6)}{4} = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

b) Sie wählen zufällig einen der beiden Würfel aus und werfen ihn zweimal. Mit welcher WS beträgt die Summe der Augenzahlen 2 ?

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{5}{288}$$

c) Mit welcher WS wirft man mit dem normalen Würfel in drei Würfen die Augensumme 15 ?
15 kann aus den Augenzahlen (6,6,3) (3 Reihenfolgen), (6,5,4) (6 Reihenfolgen) und (5,5,5) (1 Möglichkeit) gebildet werden, alle sind gleichwahrscheinlich :

$$P = 10\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5}{108}$$

d) Sie werfen den normalen Spielwürfel so oft, bis eine Augenzahl zum zweiten Mal erscheint. Dann hören Sie auf. Mit welcher WS werfen Sie genau 4 mal ?
Beim ersten Mal würfeln ist es egal welche Zahl kommt (WS = 1) , nennen wir sie Z1. Beim zweiten Mal kann wieder Z1 (mit der WS 1/6) oder eine andere Zahl Z2 (mit 5/6) kommen.
Beim dritten mal kann Z1 oder Z2 (mit 2/6) kommen, oder eine andere Zahl Z3 (4/6). Beim vierten Mal schließlich kann Z1,Z2 oder Z3 kommen (3/6), dann ist das Spiel nach genau 4 Mal vorbei, oder eine andere Zahl Z4.
Die WS nach genau 4 Mal zu enden ist :

$$P = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$$

e) Nun wählen Sie zufällig einen der beiden Würfel aus und werfen ihn 6 mal. Sie staunen : Fünfmal haben Sie eine 6 geworfen. Sicher denken Sie nun, dass Sie den gefälschten Würfel geworfen haben. Mit welcher WS irren Sie sich ?

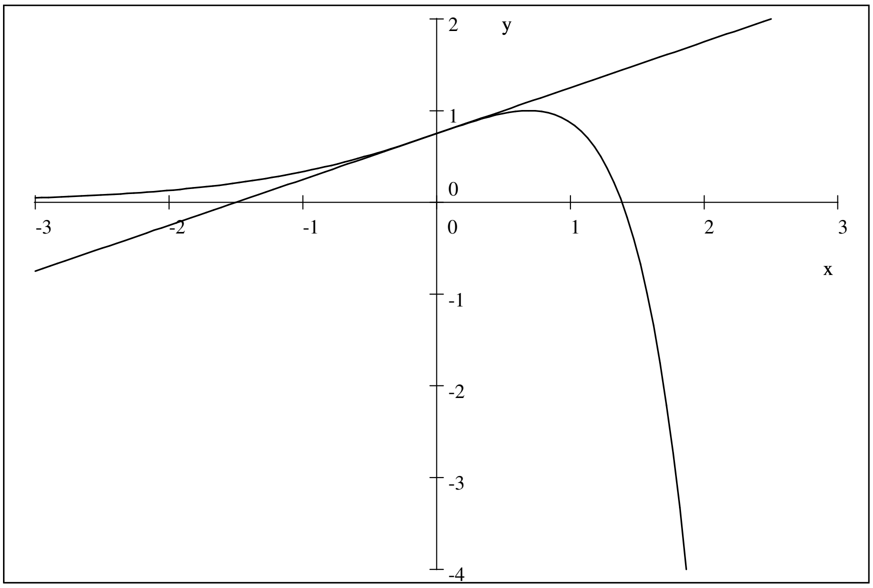
$$\begin{aligned} P_{normal}\,(\text{5 mal 6}) &= 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{7776} \\ P_{gef\ddot{a}lscht}\,(\text{5 mal 6}) &= 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{243} \\ P_{Irrtum} &= \frac{P_{normal}}{P_{normal} + P_{gef\ddot{a}lscht}} = \frac{\frac{5}{7776}}{\frac{5}{7776} + \frac{4}{243}} = \frac{5}{133} \end{aligned}$$

4. Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = e^x \left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)$

a) Bestimmen Sie die Nullstelle, den Extremalpunkt und den Wendepunkt der Kurve. Fertigen Sie eine Skizze der Kurve an.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \left(1 - \frac{1}{4}e^x\right) \\
f'(x) &= e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \\
f''(x) &= e^x - e^{2x} \\
f'''(x) &= e^x - 2e^{2x} \\
\text{Nullstelle} &: \\
f(x) &= 0 \\
x &= \ln 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Extrema} &: \\
f'(x) &= 0 \\
x &= \ln 2 \\
f''(\ln 2) &= -2 < 0 \\
&\quad Max\,(\ln 2|1) \\
\text{Wendepunkte} &: \\
f''(x) &= 0 \\
x &= 0 \\
f'''(1) &= -1 \neq 0 \\
&\quad WP\left(0|\frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$



b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt der Kurve.

$$\begin{aligned}
t &: \; y = m\,(x - x_0) + y_0 \\
y &= f'(0)\,(x - 0) + \frac{3}{4} \\
y &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

c) Diese Tangente, die Kurve und die x-Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

$$
\begin{aligned}
A &= A_{Dreick} + A_{Kurve.x-Achse} \\
A &= \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{4} + \int_0^{\ln 4} f(x)dx \\
A &= \frac{9}{16} + \int_0^{\ln 4} \left(e^x \left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)\right) dx \\
A &= \frac{9}{16} + \left[e^x - \frac{1}{8}e^{2x}\right]_0^{\ln 4} \\
A &= \frac{9}{16} + \frac{9}{8} = \frac{27}{16}
\end{aligned}
$$

5. Die folgende Teilaufgaben sind unabhängig voneinande lösbar .

5.1.Gegeben sind die Punkte A(1,2,-2), B(-9,-8,3) und C(4,-4,-8)

a)Berechnen Sie alle Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9-1 \\ -8-2 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -4-2 \\ -8+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4+9 \\ -4+9 \\ -8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC} = \frac{\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{225}\sqrt{81}} = \frac{0}{\sqrt{225}\sqrt{81}} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 30,96^\circ \text{ und somit } \gamma = 59,04^\circ$$

$$A = \frac{1}{2}AC\cdot AB = \frac{15\cdot 9}{2} = \frac{135}{2}$$

b)Liegt der Punkt P(-1,0,-1) auf der Gerden AB ?

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 0-2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AP} = k\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{1}{5}$$

P liegt auf AB

c)Liegt der Punkt Q(-7,-18,-4) in der Ebene des Dreiecks ABC ?

$$E(ABC) : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\prime\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\prime\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$E(ABC) : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -18 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -6, \mu = -4$$

Q liegt in E(ABC)

5.2.Ein etwas exzentrische Gärtner möchte ein kreisförmiges und ein quadratisches Blumenbeet mit einem Zaun umzäunen. Es steht im 100m Zaun zur Verfügung. Bestimmen Sie den Radius des kreisförmigen und die Seitenlänge a des quadratischen Blumenbeetes so, dass die Fläche der beiden Beete zusammen

a) maximal

b) minimal

ist.

$$U = 2\pi r + 4a = 100$$

$$a = 25 - \frac{\pi}{2}r$$

$$A(r,a) = \pi r^2 + a^2 \rightarrow extremal$$

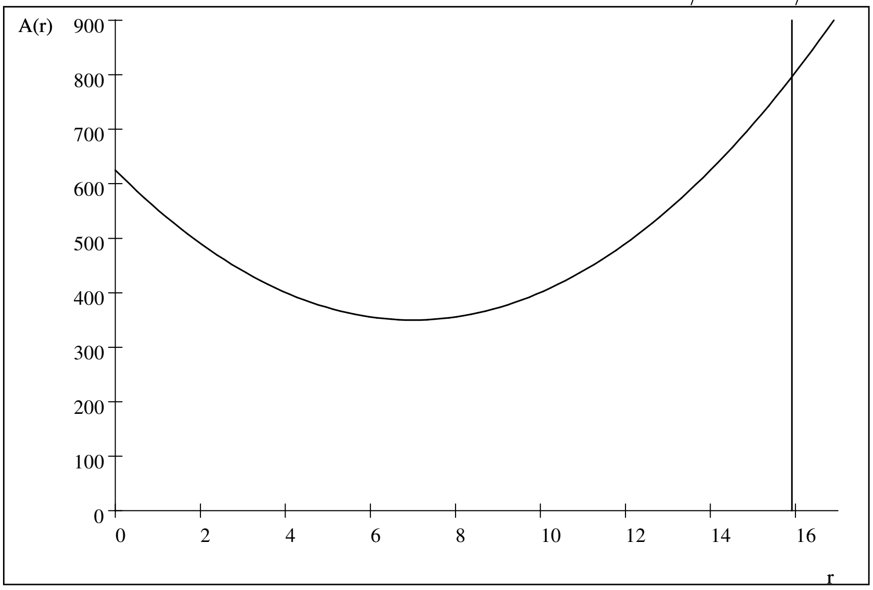
$$A(r) = \pi r^2 + \left(25 - \frac{\pi}{2}r\right)^2$$

$$A(r) = \frac{1}{4}\pi(\pi+4)r^2 - 25\pi r + 625$$

$A(r)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel deren Scheitel ein Minimum ist :

$$\begin{aligned} "x_S &= -\frac{b}{2a}" = -\frac{-25\pi}{2\cdot\frac{1}{4}\pi\left(\pi+4\right)} = \frac{50}{\pi+4} = r \\ a &= \frac{100}{\pi+4} = 14,002; r = 7.001\,2 \\ A_{\min} &= \frac{2500}{\pi+4} = 350,06m^2 \end{aligned}$$

Die Maxima ergeben sich an den Rändern des Definitionsbereichs. Für r sind dies 0 und $U/2\pi = 50/\pi = 15.915$



$$\begin{aligned} A\left(r=0\right) &= 625m^2 \\ A\left(r=50/\pi\right) &= \frac{2500}{\pi} = 795,77m^2 \end{aligned}$$

Das Maximum liegt also am rechten Rand und ergibt sich zu $r = 50/\pi = 15,9$ und $a = 25 - \frac{\pi}{2}\frac{50}{\pi} = 0$

Zum Vergleich A(a) :