

Mathematik

Normales Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Es werden Funktionen mit den Vorschriften $f(x) = x^3 - bx$ ($x \in \mathbb{R}$) betrachtet.

- Skizzieren Sie den Graphen von f für $b = 9$.
Unter welchem Winkel schneidet der Graph die x -Achse im Ursprung?
Der Graph von f und die x -Achse schliessen zwei Flächen ein. Bestimmen Sie deren Inhalte.
- Für welches $b > 0$ ist die Winkelhalbierende $y = -x$ Wendetangente des Graphen?
- Für welches $b > 0$ ist der Inhalt der beiden von der x -Achse und dem Graphen von f eingeschlossenen Flächen je 1?

2. In einer Urne befinden sich 4 weisse und 8 schwarze Kugeln.

- Man zieht gleichzeitig zwei Kugeln.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
 - die beiden Kugeln gleich farbig sind?
 - die beiden Kugeln verschieden farbig sind?
- Für einen Einsatz von 6 Franken darf man entscheiden, ob man gleichzeitig 2, 3 oder 4 Kugeln ziehen will.
Sind alle gezogenen Kugeln gleich farbig, erhält man
 - 10 Franken (bei 2 gezogenen Kugeln) beziehungsweise
 - 20 Franken (bei 3 gezogenen Kugeln) beziehungsweise
 - 40 Franken (bei 4 gezogenen Kugeln).Wie viele Kugeln soll man ziehen, wenn man bei mehrfacher Durchführung auf die Dauer einen möglichst grossen Gewinn erzielen will?
Wie gross ist dieser (möglichst grosse) Gewinn? Um wie viel ist er grösser oder kleiner als der Einsatz?

3. Lösen Sie die beiden voneinander unabhängigen Aufgaben.

3.1. Die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ x \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Bestimmen Sie x , y und z und den Betrag des Vektors $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3.2. Bestimmen Sie alle reellen Lösungspaare (x, y) des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} \lg(x) - \lg(y) = 3 \\ x - 6y = 6 \end{cases} \quad \lg(x) \text{ ist der Logarithmus von } x \text{ zur Basis } 2$$

3.3. Der Graph der Funktion mit der Vorschrift $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$ wird im Intervall $0 \leq x \leq \pi$ von der Horizontalen $y = 1$ geschnitten. Wie viel Prozent der vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossenen Fläche liegt oberhalb dieser Horizontalen?

4. Gegeben sei im dreidimensionalen Raum das Dreieck $A(7/5/3)$, $B(-1/7/5)$, $C(1/5/-3)$ sowie die Gerade g , die durch die Punkte $P(5/10/-2)$ und $Q(2/4/7)$ geht.

- Stellen Sie das Dreieck ABC und die Gerade g in einem geeigneten Schrägbild dar.
- Berechnen Sie im Dreieck den Winkel α und begründen Sie, dass das Dreieck eine spezielle Form (gleichseitig, gleichschenkelig, rechtwinklig) aufweist.
- Geben Sie eine Parameterform der Geraden g an und berechnen Sie den Durchstosspunkt der Geraden mit der Grundrissebene (xy -Ebene).
- Beweisen Sie algebraisch-rechnerisch (oder geometrisch-konstruktiv, mit Hilfe des Schrägbildes), dass die Gerade g eine Seite des Dreiecks ABC schneidet.

5. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

- Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn der Graph von f
 - an der x -Achse,
 - an der y -Achse,
 - am Koordinatenursprung $O(0/0)$gespiegelt wird?
- Für welches $a > 0$ bilden der Ursprung O , der Punkt $(a/f(a))$ auf dem Graphen von f sowie seine Projektion $(a/0)$ ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt?