

Mathematik

Normales Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Für $a > 0$ ist die Funktionsschar f_a gegeben durch $f_a(x) = \frac{x^3}{12a} - x^2 + 3ax$.

- a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte in Abhängigkeit des Parameters a .
- b) Zwischen dem Graphen von f_a und der x -Achse ist eine Fläche eingeschlossen. Wie muss man den Parameter a wählen, damit ihr Inhalt genau 18 Flächeneinheiten beträgt?
- c) Der Graph von f_a schliesst mit der y -Achse und der Wendetangente eine endliche Fläche ein. Drücken Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a aus.
- d) Man wählt $a = 2$. In der zwischen dem Graphen von f_2 und der x -Achse eingeschlossenen Fläche soll ein rechtwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben werden. Die Ecke A liegt auf dem Funktionsgraphen, die Ecke B im Koordinatenursprung und die Kathete BC auf der x -Achse. Wie muss A gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal wird?

2. Es wird die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = e^{-2x}$ ($x \in \mathbb{R}$) betrachtet.

- a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f .
Der Graph von f schliesst mit den Koordinatenachsen und der Geraden $x = 2$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.
- b) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion mit der Gleichung $g(x) = f(x) + k$ die Gerade $y = -x$ berührt.
- c) Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion g^{-1} von g .

3. In einer Urne befinden sich 56 Kugeln; x Kugeln sind weiss, $2x$ Kugeln sind rot, die restlichen Kugeln sind schwarz ($x \in \mathbb{N}_0$).

- a) Welche Werte sind für x zulässig ?
- b) Es sei nun $x = 10$. Man zieht gleichzeitig drei Kugeln.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
 - b1) alle Kugeln gleichfarbig sind ?
 - b2) alle Kugeln verschiedenfarbig sind ?
- c) Man zieht gleichzeitig zwei Kugeln.
 - c1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Kugeln gleichfarbig sind, in Abhängigkeit von x an.
 - c2) Für welches x wird diese Wahrscheinlichkeit minimal ?
 - c3) Für welches x wird diese Wahrscheinlichkeit maximal ?

4. Die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (t \in \mathbb{R})$ sowie der Punkt $Z(0/0/3)$ liegen in der Ebene E .

- a) [...]
- b) [..]
- c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte X und Y der Ebene E mit der x -Achse bzw. y -Achse.
- d) Auf der Seite XY liegen die Punkte A und B . Bestimmen Sie A und B so, dass das Dreieck ABZ gleichschenkelig (mit der Basis AB) ist und sein Flächeninhalt $36\sqrt{2}$ beträgt.

5. Zwei voneinander unabhängige Aufgaben (je 5 Punkte)

5.1 Gegeben sind die Funktionen f mit $x \rightarrow \sin(x)$ und g mit $x \rightarrow \sin(2x)$. Sei a die kleinste positive Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$.

- a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen von f und g an der Stelle $x = a$?
- b) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f und g auf dem Intervall $0 \leq x \leq a$.

5.2 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x+1 \\ x-3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2x-7 \end{pmatrix}$.

Kann x so gewählt werden, dass die beiden Vektoren

- a) identisch sind ?
- b) senkrecht aufeinander stehen ?
- c) den gleichen Betrag haben ?

Wenn ja, sind jeweils sämtliche Lösungen zu bestimmen; wenn nein, ist diese Antwort zu begründen.