Mateur H11

1. $y = -2x^5 - x^3 + 3x$

a) $\underline{f(-x)} = -2(-x)^5 - (-x)^3 + 3(-x)$

$= -(-2x^5 - x^3 + 3x) = \underline{-f(x)}$

b) NST: $\underbrace{x}_{x=0}\underbrace{(2x^4 + x^2 - 3)}_{x^2=u} = 0$

$x = \pm 1$

$y' = -10x^4 - 3x^2 + 3$

$y'' = -40x^3 - 6x +$

$y''' = -120x^2 - 6$

Exh. $-10x^4 - 3\underbrace{x^2}_{u} + 3 = 0$

$x = \pm \frac{1}{10}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \simeq \pm 0{,}646$

$Y = \pm 1{,}44$

$f''(\pm 0{,}646) \lessgtr 0 \Rightarrow$ Max $\left(\frac{1}{10}\sqrt{-15+5\sqrt{129}} \mid 1{,}44\right)$

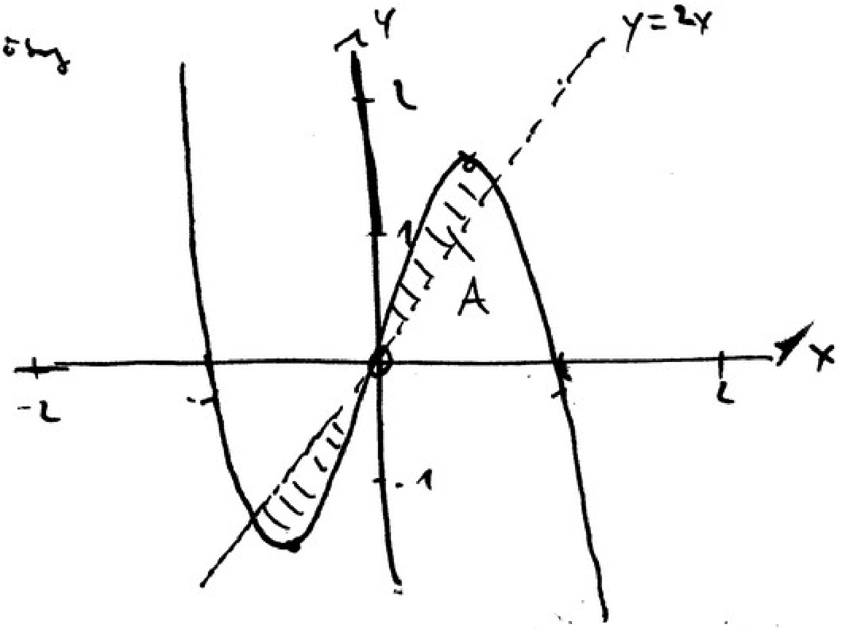
Min $(-$ " $\mid -1{,}44)$

$y'' = 0$

$\underbrace{x}_{x=0}\underbrace{(-40x^2 - 6)}_{\text{Kein Lösung}} = 0$

$x = 0$ einfache NST, VZW, $\underline{WP(0|0)}$

$Y = 0$



1.

c) $m = f'(0) = 3 \qquad q = 0$, da $(0|0)$

$t: \; y = 3x$

d) $$A = \int_0^{x_s} (f(x) - 2x)\,dx$$

x_s: $\quad f(x) = 2x$

$$-2x^5 - x^3 + 3x = 2x$$

$$\underbrace{x}_{x=0}\,(\underbrace{2x^4 + x^2 - 1}_{x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}}) = 0$$

$$\underline{A} = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} (-2x^5 - x^3 + x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 0$$

$$= \underline{\frac{7}{48}}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 = \frac{1}{8}$

| Mater H 11

2.

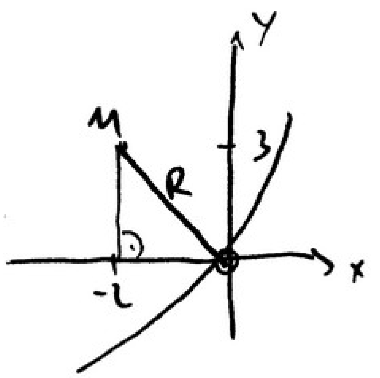
$K: \; x^2+y^2+4x-6y+a=0$

$(x^2+4x+4+y^2-6y+9) = -a+4+9$

$(x+2)^2+(y-3)^2 = 13-a$

$\underline{\underline{M(-2|3)}} \qquad R=\sqrt{13-a}$ $\qquad$ $\underline{M \text{ ist immer } (-2|3)}$

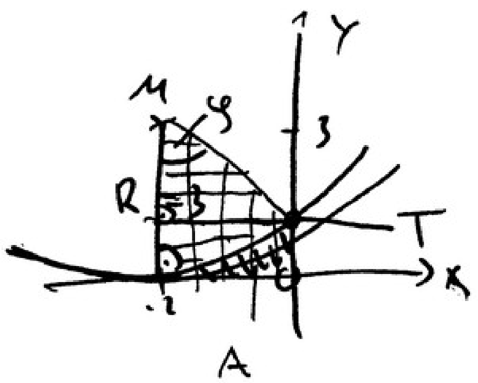
a) (0|0) auf K



$R^2 = 2^2+3^2 = 13-a$

$\underline{a=0}$

b) K berührt x-Achse



$R^2 = 9 = 13-a$

$\underline{a=4}$

c)

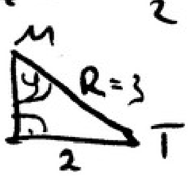
$A = A_{Trapez} - A_{Sektor}$

$T: \; x=0$ in $\underset{a=4}{K}$: $\quad y = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5}$

$\underline{T(0|3-\sqrt{5})}$

$A_{Trapez} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{3+3-\sqrt{5}}{2} \cdot 2 = \underline{6-\sqrt{5}}$

φ:



$\sin φ = \frac{2}{3} \Rightarrow φ = 41{,}81°$

2.

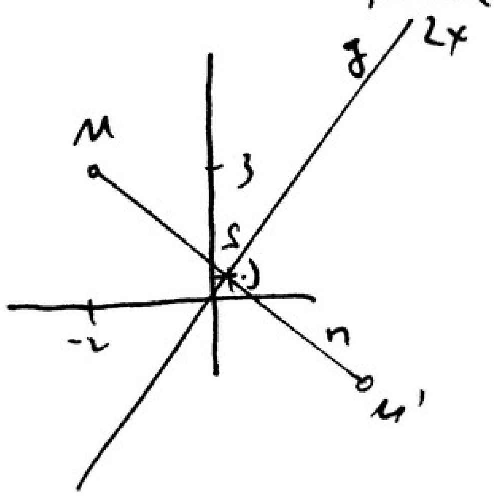
Mahert H11

$$A_{Sektor} = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot R^2 \pi = \frac{41{,}81^\circ}{360^\circ} \cdot 9 \cdot \pi = \underline{3{,}28}$$

$$\underline{A} = A_T - A_S = 6 - \sqrt{5} - 3{,}28 = \underline{0{,}480}$$

$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d)



$$n: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$n \cap g$: $\quad y = 2x$

$$3 - \lambda = 2 \cdot (-2 + 2\lambda)$$

$$\lambda = \frac{7}{5}$$

$$\vec{MS} = \frac{7}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{MM'} = 2 \cdot \vec{MS} = \frac{14}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{M'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{14}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$K': \quad \left(x - \frac{18}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = 9$$

3. a) 12 rot, 10 grün, 8 blau, 6 gelb | Mater H11

a_1) $W(rr, gg, bb, GG) = \left(\frac{12}{36}\right)^2 + \left(\frac{10}{36}\right)^2 + \left(\frac{8}{36}\right)^2 + \left(\frac{6}{36}\right)^2 = \underline{\frac{43}{162} = 26{,}5\%}$

a_2) " $= \frac{12\cdot 11}{36\cdot 35} + \frac{10\cdot 9}{36\cdot 35} + \frac{8\cdot 7}{36\cdot 35} + \frac{6\cdot 5}{36\cdot 35} = \underline{\frac{11}{45} = 24{,}4\%}$

a_3) W(mind. eine G in 3)

$= 1 - W$(keine G. in 3)

$= 1 - \frac{30}{36}\cdot\frac{29}{35}\cdot\frac{28}{34} = \frac{22}{51} = \underline{43{,}1\%}$

a_4) W(n, damit mind. eine blaue) > 0,95

1 − (n, keine blaue) > 0,95

$1 - \left(\frac{26}{36}\right)^n > 0{,}95$

$n > \log_{\frac{26}{36}} 0{,}05 = 9{,}2$

<u>Ab 10 Wiederholungen.</u>

3.b) x rot

y schwarz

$$P(rot) = \frac{2}{3} = \frac{x}{x+y}$$

$$\underline{x = 2y}$$

$$P(2\text{ Kugeln verschiedenf.}) = \frac{1}{2} = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{\cancel{x-1}\, y}{x+y-1} + \frac{y}{x+y} \frac{x}{x+y-1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2xy}{(x+y)(x+y-1)} \quad \Big|\ x = 2y$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4y^2}{3y(3y-1)}$$

$$9y^2 - 3y = 8y^2$$

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y(y-3) = 0$$

$$(y = 0);\ \underline{y = 3 \text{ schwarze}}$$

$$\underline{x = 6 \text{ rote}}$$

4. $y = a \cdot e^{-2x} - 1$

a) durch $Y(0|2)$: $2 = a - 1$

$\underline{a = 3}$

b) $0 = a e^{-2x} - 1$

$e^{-2x} = \frac{1}{a}$

$\underline{x} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{a} = \underline{\ln \sqrt{a}} = \frac{1}{2} \ln a$

$f'(x) = -2a e^{-2x}$

$f'(\ln \sqrt{a}) = -2a \cdot e^{-\ln a} = \frac{-2a}{e^{\ln a}} = \frac{-2a}{a} = -2 = \tan \varphi$

$\underline{\alpha = -63{,}4° = 116{,}6°}$

c) $A = \int_0^{\frac{1}{2}\ln a} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{2} a e^{-2x} - x\right]_0^{\frac{1}{2}\ln a}$

$= -\frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \ln a - \left(-\frac{1}{2} a - 0\right)$

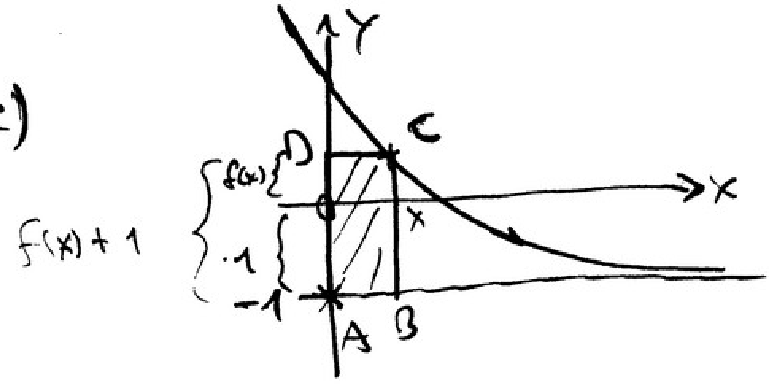
$\underline{= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} a}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{a \cdot e^{-2x}}_{\to 0} - 1 = \underline{-1 = y}$: waag. A. für $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{a e^{-2x}}_{\to \pm\infty} - 1 = \underset{a \gtrless 0}{\pm\infty}$

4.

e)



$F = x \cdot (f(x) - (-1)) = x \cdot (f(x) + 1)$

$= x \cdot a \cdot e^{-2x}$

$\mathbb{D} = [0; \frac{1}{2} \ln a]$

$F'(x) = a \cdot (e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2))$

$= a(1 - 2x) e^{-2x}$

$F'(x) = 0$

$\underline{x = \frac{1}{2}}$

$F(0) = 0$

$\underline{F(\frac{1}{2} \ln a)} = \frac{1}{2} \ln a \cdot a \cdot \frac{1}{a}$

$\underline{= \frac{1}{2} \ln a} = \frac{\ln a}{2}$

VZT

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$F'(x)$	+	0	-

↗ Max ↘

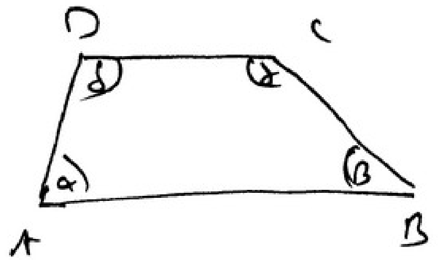
$F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} a \cdot e^{-1} = \frac{a}{2e}$

Max bei $x = \frac{1}{2}$, falls $x \in \mathbb{D}$ d.h. $a > e$

$x = a$ falls $a < e$

Mathe H11

5. $A(1|4|-2)$
$B(5|12|-10)$
$C(9|11|-9)$
$D(6|5|-3)$.



a) ABCD Trapez?

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

also $\vec{AB}$ Kolinear $\vec{CD}$, somit Trapez

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{AB \cdot AD} = \frac{4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{4\cdot 3\cdot\sqrt{5^2+1^2+1^2}} = \frac{5+2+2}{3\sqrt{27}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\underline{\alpha = 54{,}74°}$

$\underline{\delta} = 180° - \alpha = \underline{125{,}26°}$

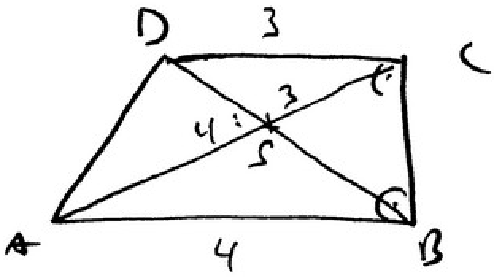
$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4(4-2-2) = 0$$

d)
AB = (4/8/-8)
P = A+1/3AB = (7/3|20/3|-14/3)
Q = A+2/3AB = (11/3|28/3|-22/3)
e)
e=1/4AB = (1|2|-2)
AD = (5|1|-1)
e x AD = (0|-9|-9)
z-Komponenten 3:
(0|3|3)

/ also $\underline{\beta = 90°}$

$\underline{\gamma = 90°}$



c) $AB : CD = 4:3$

also teilt S AC im Verhältnis 4:3

$$\vec{r}_S = \frac{4\vec{r}_C + 3\vec{r}_A}{7} = \frac{4\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}{7} = \begin{pmatrix} 39/7 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$S(\frac{39}{7}|8|-6)$

Schweizerische Maturitätsprüfung | Gruppe / Kandidat/in Nr.: ....

Herbst 2011, Basel | Name/Vorname: ....

Mathematik Normales Niveau

Dauer: 4 Stunden
Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBF/SMK); TR: Casio FX–82 Solar oder TI–30 eco RS.
Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen.
Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben, so runden Sie auf 3 signifikante Ziffern.
Lösungen ohne nachvollziehbaren Lösungsweg werden nicht bewertet.

Jede Aufgabe wird mit je maximal 12 Punkten bewertet.
Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

---

1. Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = -2 \cdot x^5 - x^3 + 3x$.

   a) Zeigen Sie, dass die Kurve punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist.

   b) Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extremalpunkte und den Wendepunkt der Kurve. Skizzieren Sie die Kurve (4 Häuschen pro Längeneinheit).

   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

   d) Die Gerade y = 2x und die Kurve begrenzen zwei Flächenstücke (eines links und eines rechts der y-Achse). Berechnen Sie den Inhalt eines dieser Flächenstücke.

2. Gegeben ist der Kreis K: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + a = 0$ mit dem Parameter a $\in$ R

   a) Bestimmen Sie a so, dass der Nullpunkt auf dem Kreis K liegt und berechnen Sie in diesem Fall auch den Mittelpunkt und den Radius des Kreises.

   b) Der Kreis K soll die x-Achse berühren. Wie muss in diesem Fall a gewählt werden? Bestimmen Sie den Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

   c) Zwischen dem in b) ermittelten Kreis und den Koordinatenachsen liegt ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

   d) Nun wird der in b) bestimmte Kreis an der Geraden y = 2x gespiegelt. Wie heisst die Gleichung des gespiegelten Kreises?

   (Falls Sie b) nicht lösen können, wählen Sie für die Teilaufgaben c) und d) den Kreis mit Mittelpunkt M(–4 / 5) und Radius 5.)

3. Die Teilaufgaben a) und b) sind unabhängig voneinander lösbar:

a) Ein Kartenspiel besteht aus 12 roten, 10 grünen, 8 blauen und 6 gelben Karten.

a_1) Sie ziehen zufällig eine Karte, merken sich die Farbe und legen sie zurück. Nun ziehen Sie nochmals eine Karte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt die zweite Karte die gleiche Farbe wie die erste?

a_2) Sie ziehen wiederum eine Karte, legen Sie nicht zurück und ziehen anschliessend eine zweite Karte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzen jetzt beide Karten die gleiche Farbe?

a_3) Sie ziehen mit einem Griff 3 Karten aus dem Spiel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine gelbe darunter?

a_4) Sie ziehen eine Karte, legen sie zurück, ziehen wiederum eine Karte, legen sie zurück,...Wie oft müssen Sie diesen Vorgang wiederholen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue zu ziehen, mindestens 0.95 beträgt?

b) In einer Urne hat es rote und schwarze Kugeln. Nimmt man eine Kugel aus der Urne heraus, so ist sie mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ rot. Nimmt man stattdessen mit einem Griff zwei Kugeln heraus, so sind diese mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ verschiedenfarbig. Wieviele rote und wieviele schwarze Kugeln sind in der Urne?

4. Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = a \cdot e^{-2x} - 1 \quad , a \in R$

a) Bestimmen Sie a so, dass die Kurve die y-Achse im Punkt Y(0 / 2) schneidet.

b) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet die Kurve die x-Achse?

c) Die Kurve begrenzt mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück.
Berechnen Sie seinen Inhalt.

d) Wie lautet die Gleichung der Asymptote der Kurve.

e) Wir betrachten alle Reckecke ABCD mit folgenden Eigenschaften:
– Der Eckpunkt A ist der Schnittpunkt der Asymptote mit der y-Achse.
– Der Eckpunkt C liegt auf der gegebenen Kurve und hat positive Koordinaten.
– Die Seite AD liegt auf der y-Achse, die Seite AB auf der Asymptote der Kurve.
Für welche Wahl von C besitzt das Rechteck den grössten Flächeinhalt?
Weisen Sie nach, dass es sich um ein Maximum handelt.

5. Gegeben sind die Punkte A(1 / 4 / –2), B(5 / 12 / –10), C(9 / 11 / –9) und D(6 / 5 / –3).

a) Zeigen Sie, dass die Punkte ABCD ein Trapez bilden.

b) Berechnen Sie alle Winkel dieses Trapezes (es ist nicht gleichschenklig).

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen des Trapezes.

d) Bestimmen Sie zwei Punkte P und Q so, dass sie die Strecke AB in drei gleich lange Teilstrecken teilen.

e) Bestimmen Sie den Vektor mit z-Komponente 3, welcher senkrecht auf der Trapezfläche steht.