Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Kandidat/in Nr.: ....

Sommer 2012, Bern Name/Vorname: ....

Mathematik

Normales Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Es werden die Graphen der beiden Funktionen mit den Vorschriften $f(x) = x$ und $g(x) = ax^2$ ($a > 0$) betrachtet.

   a) Skizzieren Sie die beiden Graphen für $a = 1$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit der Einheit 1cm.
   Bestimmen Sie (wieder für $a = 1$) alle Schnittpunkte der beiden Graphen und in jedem Schnittpunkt den Schnittwinkel der beiden Graphen.

   b) Wie gross ist der Inhalt der Fläche, welche von den beiden Graphen (für $a = 1$) eingeschlossen wird?

   c) Bestimmen Sie nun a derart, dass der Inhalt der von den beiden Graphen eingeschlossenen Fläche 6 Einheiten beträgt.

2. a) Gegeben sind die Gerade g und die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch

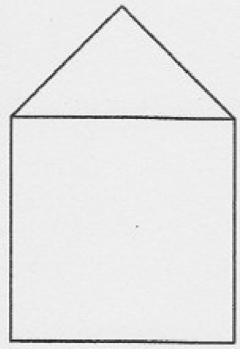
   g: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Dabei ist O der Koordinatenursprung.

   1) Von O aus wird das Lot l auf die Gerade g gelegt. Berechnen Sie den Fusspunkt F des Lots.
   2) Stellen Sie den Ortsvektor $\vec{f} = \overrightarrow{OF}$ von F als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

   b) Die Flächeninhalte zweier Kreise K_1 mit dem Mittelpunkt M_1(-5/0) und K_2 mit dem Mittelpunkt M_2(4/12) verhalten sich wie 4 : 1. Die beiden Kreisflächen besitzen genau einen gemeinsamen Punkt T.
   Bestimmen Sie T und die Gleichung der gemeinsamen Kreistangente in T.

3. Gegeben seien die drei Punkte $A(-4/4/5)$, $B(4/7/0)$ und $C(8/-2/1)$.



a) Beweisen Sie, dass das Dreieck *ABC* rechtwinklig-gleichschenklig ist.

b) In der Ebene, die vom Dreieck *ABC* aufgespannt wird, sollen die Koordinaten zweier Punkte *D* und *E* so bestimmt werden, dass über der Hypotenuse des Dreiecks ein Quadrat gemäss neben stehender Figur entsteht.

c) Eines der beiden Dreiecke *ABD* und *ABE* ist rechtwinklig. Bestimmen Sie in diesem rechtwinkligen Dreieck den kleinsten Innenwinkel.

4. *A* würfelt einen einzigen echten Würfel, *B* hingegen zwei echte Würfel. *A* ist Gewinner, wenn seine Augenzahl höher ist als die Summe der beiden Augenzahlen von *B*.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es keinen Gewinner gibt, also *A* mit seinem Würfel genau gleich viele Augenzahlen wirft wie *B* mit beiden Würfeln zusammen?

b) Beweisen Sie, dass *A* ein Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $P(A)=\frac{5}{54}$ gewinnt.

c) *A* und *B* spielen dieses Spiel 10mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass *A* mindestens einmal gewinnt?

5. Der Graph der Funktion *f* mit der Vorschrift $f(x)=a\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-b$ $(a,b \in \mathbb{R})$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $X(ln(4)/0)$ und $Y(0/1)$.

a) Bestimmen Sie die beiden Parameter *a* und *b*.

Falls *a* und *b* nicht bestimmt werden konnten, setze man im Folgenden $a = 2$ und $b = 1$.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von *f* mit den beiden Koordinatenachsen einschliesst.

c) In *X* und *Y* werden die Tangenten an den Graphen von *f* gelegt. Unter welchem Winkel schneiden sich diese beiden Tangenten?