

## Mathematik normales Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $\pi$ ,  $e$ , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet, falls alle Herleitungen vollständig und nachvollziehbar dargelegt sind. Für die Note 6 werden mindestens 43 Punkte verlangt.

1. Der Graph der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{p}{x} + \frac{q}{x^2}$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) sei für  $x > 0$  gegeben.

- Bestimmen Sie die Parameter  $p$  und  $q$  so, dass der Graph von  $f$  in  $E(2/1)$  ein Extremum besitzt. (Falls Sie  $p$  und  $q$  nicht finden konnten, rechnen Sie mit  $p = 2$  und  $q = -2$  weiter.)
- Diskutieren Sie  $f$  (Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte, Asymptoten) und zeichnen Sie einen Graphen von  $f$ .
- Durch den Ursprung wird eine Tangente an den Graphen von  $f$  gelegt. Im ersten Quadranten berührt sie die Kurve im Punkt  $B$ ; bestimmen Sie die Koordinaten von  $B$ .

2. Zwei unabhängige Aufgaben

2.1 Die Schar von Funktionen  $f_a(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$  ( $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) ist gegeben.

Für welche  $a$  hat der Graph von  $f_a$  keine Wendepunkte?

2.2 Es wird ein Punkt  $P$  auf dem Graphen der Funktion  $g(x) = (1-x)e^x$  im ersten Quadranten betrachtet. Der Punkt  $P$ , seine (senkrechte) Projektion  $Q$  auf die  $x$ -Achse und der Koordinatenursprung  $O$  bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Für welche Lage von  $Q$  ist der Inhalt des Dreiecks maximal?

3. Im Raum seien 3 Punkte gegeben. Die Punkte  $A$  und  $B$  sind die Eckpunkte eines Rhombus,  $E$  sein Diagonalschnittpunkt:  $A(-4/5/-2)$ ,  $B(6/3/9)$ ,  $E(-6/5/6)$ .
- Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte  $C$  und  $D$  des Rhombus.
  - Wie gross sind die Innenwinkel und wie gross ist der Flächeninhalt des Rhombus?
  - Erstellen Sie ein Schrägbild des Rhombus und geben Sie eine Parametergleichung der Geraden durch die Punkte  $A$  und  $B$  an.

4. In einer Urne befinden sich 4 gelbe, 8 blaue und 12 rote Kugeln.
- Es wird eine Kugel herausgezogen, ihre Farbe notiert und wieder zurück gelegt. Danach wird der Vorgang wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln von gleicher Farbe?
  - Nun werden drei Kugeln gleichzeitig gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde von jeder Farbe genau 1 Kugel gezogen?
  - Nun werden der Urne 12 weitere Kugeln der Farben gelb, blau, rot beigemischt. Man weiss lediglich, dass genau 2 rote darunter sind, die restlichen sind gelb oder blau. Zieht man nun hintereinander 2 Kugeln und legt sie jeweils zurück, so ist die Wahrscheinlichkeit, genau 1 gelbe und 1 blaue gezogen zu haben,  $\frac{4}{27}$ . Wie viele gelbe und wie viele blaue Kugeln wurden dazu gelegt?

5. Zwei unabhängige Aufgaben

5.1 Die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  soll Tangente an einen Kreis mit Mittelpunkt  $M(3/2)$  sein.

Wie gross ist der Radius dieses Kreises und wo schneidet der Kreis die Koordinatenachsen?

5.2 Die Bevölkerung eines Landes nimmt seit dem Beginn des Jahres 2000 jährlich um 3.5% zu.

- Bis zum 1. Januar 2002 ist sie um 100'000 Personen gewachsen. Wie gross war demnach die Bevölkerung am 1. Januar 2000?
- Wie lange dauert es, bis die Einwohnerzahl dieses Landes um 125% gestiegen ist?