

Mathematik normales Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , e , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet, falls alle Herleitungen vollständig und nachvollziehbar dargelegt sind. Für die Note 6 werden mindestens 43 Punkte verlangt.

Punkteverteilung:

1a	1b	2.1	2.2	2.3	3a	3b	3c	3d	4a	4b	4c	4d	5.1	5.2	Total	Note
7	3	3	3	4	5	1	2	2	2	2	3	3	3	7	50	

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = (3 - x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Diskutieren Sie f (Nullstellen, Extremal- und Wendepunkte, Asymptoten) und zeichnen Sie den Graphen von f .
 - b) Im Punkt $T(3/f(3))$ wird die Tangente t an den Graphen von f gelegt. Wo schneidet t die y -Achse?

2. Drei unabhängige Aufgaben
 - 2.1 Herr Lanzo besass Ende 2014 auf seinem Sparkonto CHF 126'450.-. Er rechnet aus, dass Ende 2026 der Kontostand CHF 168'080.- sein wird, falls sich der Zinsfuss nicht ändert und er weder etwas abhebt noch etwas dazulegt. Wie gross ist demnach der Zinsfuss ?
 - 2.2 Wie viele Wendestellen hat der Graph von $f(x) = 3x^5 - 20x^4 + 40x^3 + 60x + 6$?
 - 2.3 Zwei echte Würfel werden mehrmals geworfen, und man möchte als Differenz der beiden Augenzahlen 5 erhalten. Wie viele Versuche muss man gewähren, wenn die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg grösser als 90% sein soll ?

3. Gegeben ist die Gerade g durch die Punkte $A(0/0/3)$ und $B(4/6/0)$ sowie die Gerade

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Stellen Sie die beiden Geraden in einem geeigneten Schrägbild dar und untersuchen Sie mittels Konstruktion und Rechnung, ob sich die beiden Geraden schneiden.
- Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, die durch h und den Punkt A verläuft.
- Wie lauten die Koordinaten des Durchstosspunktes Y der Ebene E mit der y -Achse?
- Für welche(s) y sind die Punkte A und $D(1/y/4)$ gleich weit von B entfernt sind?

4. Eine Urne enthält 10 Kugeln, nämlich 1 weisse, 2 blaue, 3 rote und 4 schwarze.

Es wird viermal eine Kugel herausgezogen, ihre Farbe notiert und wieder zurückgelegt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle vier Kugeln die gleiche Farbe?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle vier Kugeln von verschiedener Farbe?
- Nun werden vier Kugeln gleichzeitig gezogen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle gezogenen Kugeln blau oder rot?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit halten wir mehr blaue als weisse Kugeln in der Hand?

5. Zwei unabhängige Aufgaben

5.1 Die Punkte $A(2/1)$, $B(4/2)$ und $C(3/6)$ sind gegeben. Berechnen Sie $D(0/y)$ so, dass sich die Diagonalen im Viereck $ABCD$ rechtwinklig schneiden.

5.2 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 4}$, $x \geq 0$. Wie gross ist $a \in \mathbb{R}$, wenn vom Quadrat $ABCD$ die Eckpunkte $A(1/0)$ und B auf der x -Achse und die Eckpunkte C und $D(1/f(1))$ auf dem Graphen der Funktion f liegen?