Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Ebikon und Bern, Sommer 2021

MATHEMATIK, Normales Niveau

Kand.-Nr.:

Name, Vorname:

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Visum Korrigierende(r): ....

Fach:	**Mathematik, Normales Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**51 Punkte**
Autoren:	Martin Fischer, Donat Graven, Hansruedi Strickler

Fachspezifische Anweisungen:

1. Bei jeder Aufgabe soll mit einem neuen Blatt begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
2. Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, e, p, etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
3. Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind alle Herleitungen vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
4. Auf saubere Darstellung wird Wert gelegt.
5. Für die Maximalnote 6 werden 47 Punkte verlangt.

Mathematik normales Niveau

Die Punkteverteilung lautet:

Aufgabe	1a	b	c	d	2a	b	c	d	3	4	5a	b	c	d	e	f	g	6
Punkte	4	2	2	4	4	2	4	2	4	3	2	2	2	2	2	2	2	6

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \mathbb{R}$
   a) Skizzieren Sie den Graphen G_f der Funktion f und die Normale n zum Graphen G_f im Punkt $P(2/\,f(2))$.
   b) Beweisen Sie: Die Normale n schneidet die Koordinatenachsen so, dass sie mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit Flächeninhalt 49 bildet.
   c) Welche Stammfunktion F von f hat bei $x = 2$ eine Nullstelle ?
   d) Um welchen Wert müsste die Normale n in y-Richtung verschoben werden, damit sie den Graphen G_f berührt ?

2. Gegeben seien in einem dreidimensionalen Koordinatensystem die Punkte $A(-1/1/-4)$, $B(-4/5/2)$ und $C(5/4/6)$.
   a) Begründen Sie, weshalb die drei Punkte A, B, C eine Ebene E aufspannen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.
   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstosspunktes der Ebene E mit der x −Achse.
   c) Begründen Sie, welcher der Innenwinkel α, β, γ im Dreieck ABC der grösste sein muss und berechnen Sie ihn.
   d) Ergänzen Sie das Dreieck ABC durch einen vierten Punkt D zu einem Parallelogramm so, dass der Punkt D eine spezielle Lage erhält. Welche Koordinaten hat D ?

3. Die Graphen der Funktionen $f(x) = 3^x,\ x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = e^{1-x},\ x \in \mathbb{R}$ begrenzen zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück A. Erstellen Sie eine Skizze der beiden Graphen und berechnen Sie den Inhalt von A.

4. Lösen Sie die Gleichung $cos(x) - 2 \cdot cos^2(x) = 0$ in der Definitionsmenge $D = [0, 3\pi]$.

5. Urne **I** enthält 7 gleichartige kleine Kugeln, die von 1 bis 7 nummeriert sind.
Urne **II** weist 5 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 5 auf.
Eine Urne wird zufällig ausgewählt und daraus eine Kugel, ebenfalls zufällig, gezogen.
Ist auf der Kugel eine gerade Zahl, dann wird der gleichen Urne noch eine weitere Kugel entnommen.
Ist die Zahl auf der ersten Kugel hingegen ungerade, dann entnimmt man der anderen Urne eine Kugel.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf beiden Kugeln eine gerade Zahl steht ?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln aus Urne **I** stammen, wenn man weiss, dass auf beiden eine gerade Zahl steht ?

Nun entnimmt man als Experiment den beiden Urnen je eine Kugel. Zieht man zwei gleiche Zahlen, so erhält man deren Summe als Punktezahl. Zieht man zwei unterschiedliche Zahlen, so erhält man die grössere der beiden als Punktezahl.

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, in diesem Experiment genau 4 Punkte zu erzielen, 1/5 beträgt.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Punkte zu erhalten.

e) Ich habe die Punktezahl 6 erzielt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit waren die beiden Zahlen unterschiedlich ?

f) A sei das Ereignis «Ich erziele 4 Punkte», B das Ereignis «Ich ziehe zwei gleiche Kugeln». Berechnen Sie $P(A \cup B)$.

g) Wie oft muss ich ziehen, damit ich 99.9%ig sicher bin, mindestens einmal genau die Punktezahl 4 zu erzielen ?

6. Aus Blech soll ein oben offener prismaförmiger Behälter mit 24dm^2 Oberfläche (Boden plus Mantel) hergestellt werden. Das Blechdreieck am Boden ist gleichseitig. Der Inhalt des Behälters soll maximal sein.
Berechnen Sie die Seitenlänge a des Dreiecks und die Höhe h des Prismas.