Frühling 2005

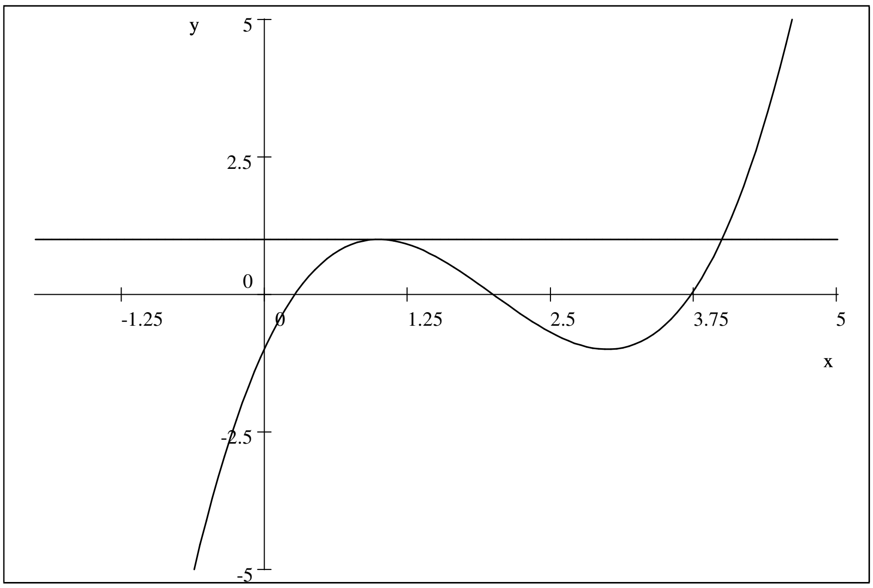
1. Von einer ganzrationalen Funktion 3. Grades kennt man die zwei relativen Extrema A(1/1) und B(3/-1). Suchen Sie die Funktionsvorschrift, skizzieren Sie den Graphen und berechnen Sie den Flächeninhalt der durch Graph und Tangente im Hochpunkt begrenzten Fläche.
   Wir kennen zwei Punkte der Funktion (zwei Gleichungen) und zugleich zwei Stellen, bei denen die Ableitung gleich Null ist.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ \text{A und B einsetzen} &: \\ I &: f(1) = 1 \\ II &: f(3) = -1 \\ \text{Ableitungen} &: \\ III &: f'(1) = 0 \\ IV &: f'(3) = 0 \end{aligned}$$

dies gibt das Gleichungssystem :

$$\begin{aligned} I &: 1 = a + b + c + d \\ II &: -1 = 27a + 9b + 3c + d \\ III &: 0 = 3a + 2b + c \\ IV &: 0 = 27a + 6b + c \\ a &= \frac{1}{2}, b = -3, c = \frac{9}{2}, d = -1 \end{aligned}$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 1$



$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0 \\ x_1 &= 1, y_1 = 1 \\ x_2 &= 3, y_2 = -1 \end{aligned}$$

Da es sich um eine steigende (1/2>0) Funktion 3'ten Grades handelt und sie zwei unterschiedliche Stellen mit waagerechter

Tangente besitzt, muss die linke ein Maximum sein.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 1 &= 1 \\
x^3 - 6x^2 + 9x - 4 &= 0 \\
\text{eine Lösung x=1ist bekannt und kann dividiert werden} &: \\
\left(x^3 - 6x^2 + 9x - 4\right)/(x-1) &= x^2 - 5x + 4 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Da es sich bei x=1 um einen Berührpunkt handelt hätte man auch $(x-1)^2$ dividieren können. So erhält man x=1 nochmals als Lösung.

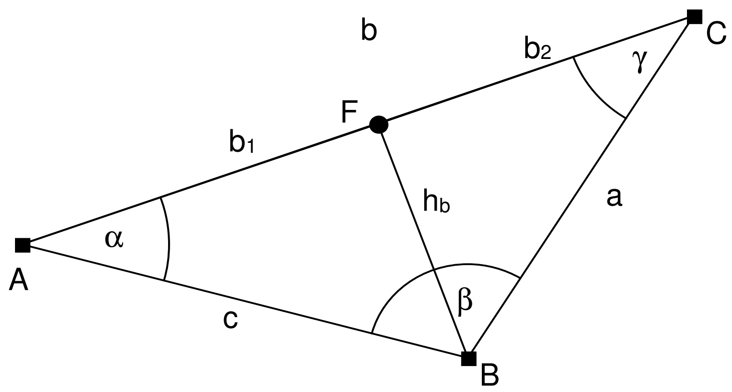
$$\begin{aligned}
A &= \int_1^4 (1 - f(x))\,dx \\
A &= \int_1^4 \left(-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x + 2\right) dx \\
A &= \left[-\frac{1}{8}x^4 + x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 2x\right]_1^4 \\
A &= \frac{27}{8}
\end{aligned}$$

2. Lösen Sie die voneinander unabhängigen Aufgaben.

2.1 Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung über $\mathbb{R}$:

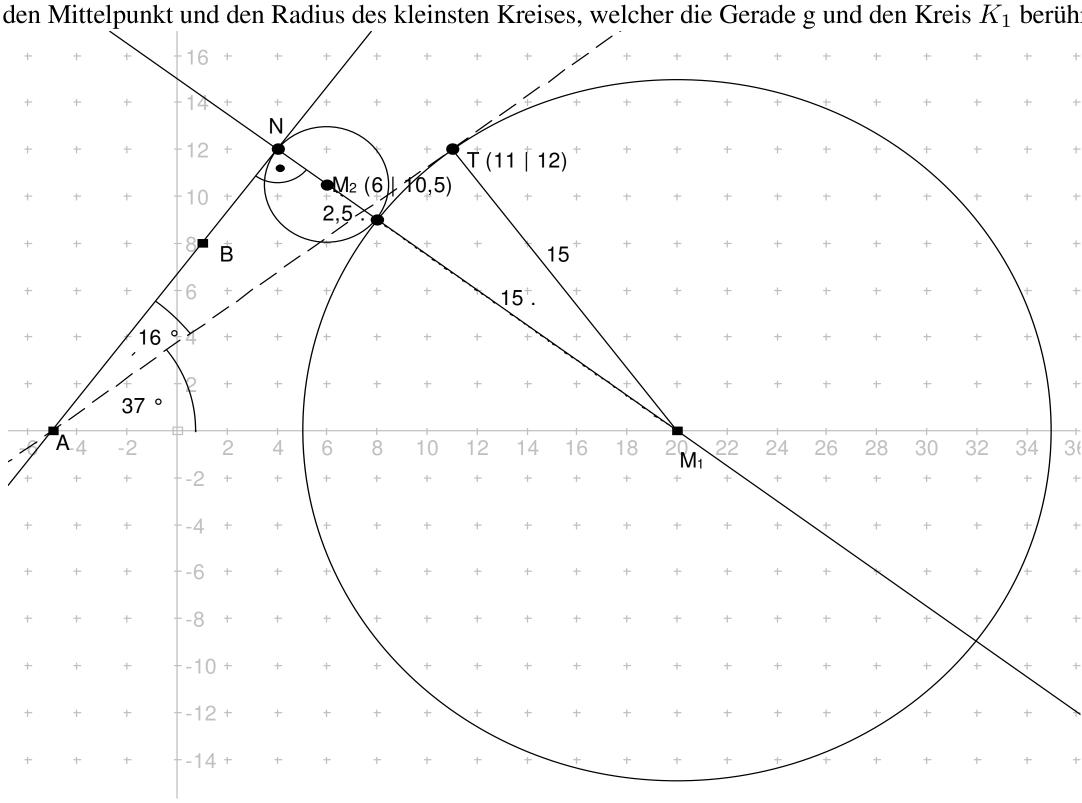
$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-12 &= x+\frac{1}{x} \\
\text{Substitution} &: u=x+\frac{1}{x} \\
u^2-12 &= u \\
u_1 &= -3, u_2=4 \\
x+\frac{1}{x} &= -3 \\
x_{1/2} &= -\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5} \\
x+\frac{1}{x} &= 4 \\
x_{3/4} &= 2\pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

2.2 Von einem Dreieck ABC kennt man die Höhe $h_b = 14.7$ (Höhe auf die Seite b) und die beiden Winkel $\beta = 101,4\,^\circ$ und $\gamma = 35,8\,^\circ$.
Berechnen Sie die Längen der drei Seiten.



$$\begin{aligned}
a &= \frac{h_b}{\sin a} = \frac{14.7}{\sin 35.8\,^\circ} = 25.13 \\
\alpha &= 180\,^\circ - \beta - \gamma = 42.8\,^\circ \\
c &= \frac{h_b}{\sin\alpha} = \frac{14.7}{\sin 42.8\,^\circ} = 21.64 \\
b_1 &= c\cdot\cos\alpha = 15.88 \\
b_2 &= a\cdot\cos\gamma = 20.38 \\
b &= b_1 + b_2 = 36.26
\end{aligned}$$

3. Gegeben sind der Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt $M_1(20|0)$ und dem Radius $r_1 = 15$ und die Gerade g durch die beiden Punkte A(-5/0) und B(1/8).
   a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des kleinsten Kreises, welcher die Gerade g und den Kreis K_1 berührt.



Wir schneiden eine Normale n zu AB durch M_1 mit der Geraden g durch AB :

$$\begin{aligned} g &: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \\ n &: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \lambda &= \frac{3}{2}, \mu = -4 \\ \overrightarrow{X_N} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{NM_1} = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix}$; $NM = 20$. Da $r_1 = 15$ ist $r_2 = 2,5$.

$\overrightarrow{M_1M_2} = 17,5 \cdot \underbrace{\frac{\overrightarrow{NM_1}}{20}}_{\text{Vektor der Länge 1}} = \frac{17.5}{20} \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.0 \\ 10.5 \end{pmatrix}$ und somit

$\overrightarrow{r_{M_2}} = \overrightarrow{r_{M_1}} + \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14.0 \\ 10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.0 \\ 10.5 \end{pmatrix}$

   b) Um welchen Winkel muss die Gerade g um den Punkt A gedreht werden, bis sie den Kreis berührt ?

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{\overrightarrow{M_1T}}{\overrightarrow{AM_1}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \\ \alpha_1 &= 36,87^\circ \\ \tan \alpha_2 &= \frac{M_1N}{AN} = \frac{20}{\sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{4}{3} \\ \alpha_2 &= 53,13^\circ \end{aligned}$$

Die Gerade muss um $\alpha_2 - \alpha_2 = 16,26^\circ$ gedreht werden.

4. Es wird der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{9-x} \;\; (0 \leq x \leq 9)$ betrachtet.
In einem Punkt P des Graphen wird die Parallele zur y-Achse gelegt. Diese schneidet die x-Achse im Punkt X.
Für welchen Punkt wird der Flächeninhalt des Dreiecks OXP maximal ?

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{9-x} \\ A &= \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - x^3} \end{aligned}$$

Da die Wurzel eine streng monotone Funktion ist, wird sie maximal, wenn ihr Argument maximal wird. Wir betrachten also $9x^2 - x^3$ als zu maximierende Funktion.

$$\begin{aligned} f(x) &= 9x^2 - x^3 \\ f'(x) &= 18x - 3x^2 = 0 \\ x_1 &= 0; x_2 = 6 \\ f''(x) &= 18 - 6x \\ f''(6) &= 18 - 36 < 0 \\ \text{also ist } x_2 &= 6 \text{ ein Maximum} \end{aligned}$$

Betrachtung der Randwerte : $A(0) = 0$; $A(9) = 0$ also Minima.

5. Gegeben sind die Gerade g : $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Gerade a : $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Parametergleichung einer Gerade n durch den Punkt P(3/10), die senkrecht zu g steht :

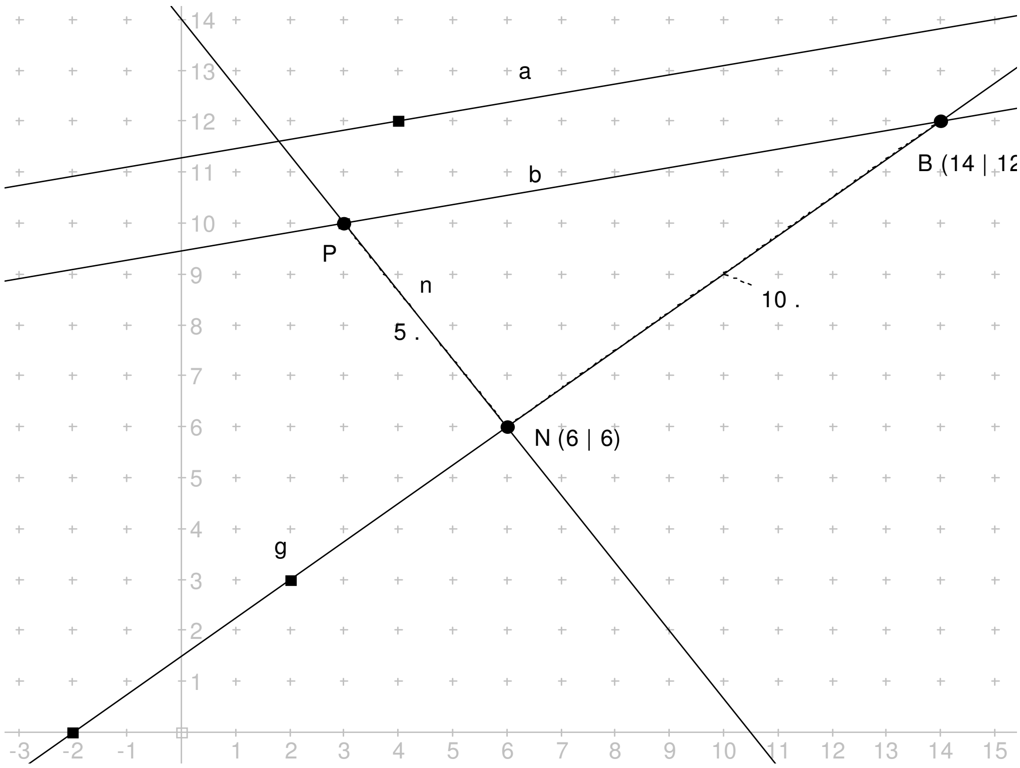
n : $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Bestimmen Sie die Parametergleichung einer Geraden $b \| a$ mit $P \in b$:

b : $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt und die Innenwinkel des Dreiecks PNB, wobei $N = n \cap g$ und $B = b \cap g$.
Das Dreieck PNB ist rechtwinklig, mit dem rechten Winkel bei N. Sein Flächeninhalt ergibt sich zu $A = 1/2 \cdot PN \cdot NB$:

$$\begin{aligned}
N &= n \cap g \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\lambda &= 2, \nu = 1 \\
\overrightarrow{r_N} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \\
B &= b \cap g \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\lambda &= 4, \eta = 1 \\
\overrightarrow{r_B} &= \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \end{pmatrix} \\
A &= 1/2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 6-3 \\ 6-10 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 14-6 \\ 12-6 \end{pmatrix} \right\| \\
A &= 25
\end{aligned}$$



6. Drei Kinder A, B und C versuchen einen Ball in einen Korb zu werfen. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist bei jedem Wurf $p = \frac{2}{5}$.
Der Reihe nach werfen A,B,C,A,B,C,A,B....

a) Wie gross ist die WS, dass alle drei Kinder in ihrem ersten Versuch den Korb treffen ?

$$WS = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125} = 6,4\%$$

b) Wie gross ist die WS, dass mindestens eines der drei Kinder in seinem erstem Versuch den Korb trifft ?

$$\begin{aligned} WS &= \text{WS(mindestens eines)=1-WS(keines)} \\ WS &= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{98}{125} = 78,4\% \end{aligned}$$

c) Wie gross ist die WS, dass nach je drei Versuchen noch keines der Kinder den Korb getroffen hat ?

$$WS = \left(\frac{3}{5}\right)^9 = \frac{19\,683}{1953\,125} = 1\%$$

d) Nach wie vielen Versuchen ist die WS, dass mindestens ein Treffer erzielt worden ist, grösser als 0,999 ?

$$\begin{aligned} \text{WS(mindestens ein Treffer)} &> 0{,}999 \\ 1 - WS(kein\,Treffer) &> 0.999 \\ WS(kein\,Treffer) &< 0.001 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^n &< 0.001 \\ n &> \frac{\log 0.001}{\log\left(\frac{3}{5}\right)} = 13,523 \\ n &> 14 \end{aligned}$$