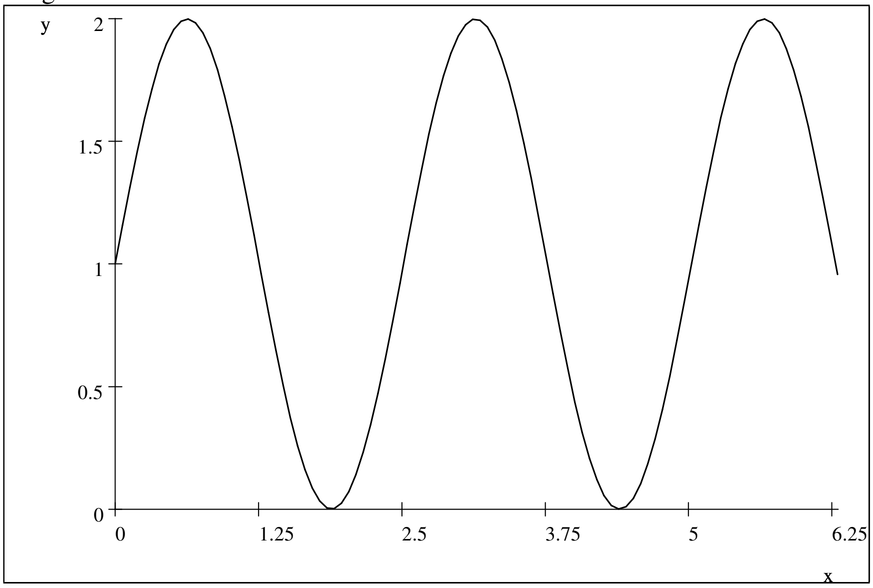
Frühling 2006

1. Von der Funktion $g(x) = 1 + \sin\frac{5x}{2}$ mit $D_g = [0; 2\pi]$ sind alle Nullstellen im Definitionsbereich, der erste positive Extremwert und eine Skizze des Graphen gesucht.



Nullstellen :

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \sin\frac{5x}{2} = 0 \\ \sin\frac{5x}{2} &= -1 \\ \text{nur eine echte Lösung :} \quad & x = \frac{3}{2}\pi \\ \frac{5x}{2} &= \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \\ x &= \frac{3}{5}\pi + z \cdot \frac{4}{5}\pi \\ \text{im Definitionsbereich liegen} \quad &: \quad x_0 = \frac{3}{5}\pi, x_1 = \frac{7}{5}\pi \end{aligned}$$

Extremwerte :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{5}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0 \\ \cos\frac{5}{2}x &= 0 \\ \text{echte Lösungen :} \quad & x_1 = \frac{1}{2}\pi \text{ und } x_2 = \frac{3}{2}\pi \\ \frac{5x_1}{2} &= \frac{1}{2}\pi + z \cdot 2\pi \\ x_1 &= \frac{\pi}{5} + z \cdot \frac{4}{5}\pi \\ \text{im Definitionsbereich liegen} \quad &: \quad x_{10} = \frac{\pi}{5}, x_{11} = \pi, x_{12} = \frac{9}{5}\pi \\ \frac{5x_2}{2} &= \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{3}{5}\pi + z \cdot \frac{4}{5}\pi \\ \text{im Definitionsbereich liegen} \quad &: \quad x_{20} = \frac{3}{5}\pi, x_{21} = \frac{7}{5}\pi \end{aligned}$$

Der erste positive Extremwert liegt bei $(\pi/5|2)$. Es ist ein Extremwert, weil g(x) lediglich eine verschobene (+1) und gestauchte (5/2) Version von sin(x) ist und somit deren Eigenschaften übernimmt an Stellen mit waagerechter Tangente einen Extremwert zu haben.

2. Von einem Parallelogramm ABCD sind A(–4/-2), B(6/3) und C(11/11) bekannt.

a) Berechne die Koordinaten der Ecke D.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_D} &= \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{r_D} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11-6 \\ 11-3 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_D} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Betrachte den Kreis mit Mittelpunkt D und Seite a=AB als Tangente; in welchem Punkt schneidet dieser Kreis die Seite c=CD?

Hierzu wird die Hesseform der Geraden CD aufgestellt. A oder B eingesetzt gibt den Abstand zu CD und somit den Radius r :

Punkt-Steigungs-Form (Punkt D, Steigung AB) :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3-(-2)}{6-(-4)}(x-1)+6 \\
y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 6 \\
x - 2y + 11 &= 0 \\
\frac{x-2y+11}{\sqrt{5}} &= 0
\end{aligned}$$

A einsetzten :

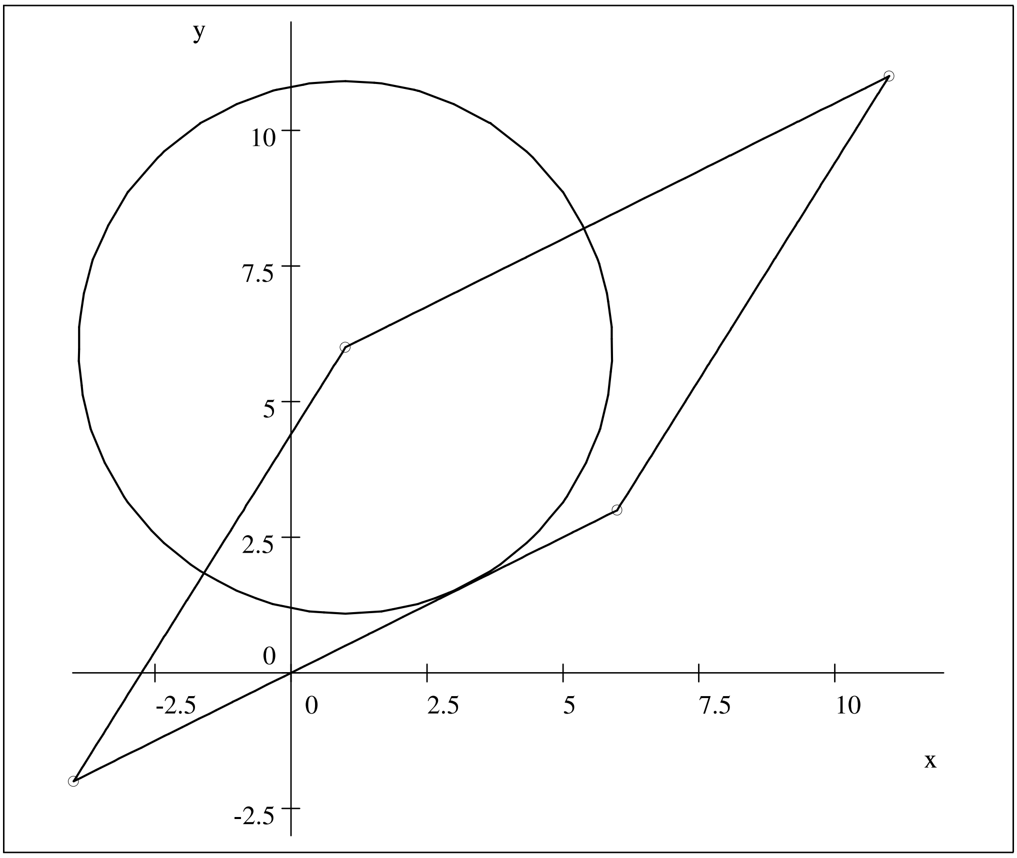
$$\begin{aligned}
d &= r = \frac{-4-2(-2)+11}{\sqrt{5}} \\
r &= \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{DS}$ (S Schnittpunkt Kreis mit CD) muss nun parallel zu $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ sein und die Länge des Radius haben.

$\overrightarrow{AB}$ hat die Länge $5\sqrt{5}$. Wenn man also $\overrightarrow{AB}$ durch 5 teilt und mit 11/5 multipliziert, erhält man einen Vektor parallel zu $\overrightarrow{AB}$ ist und die Länge von r hat, also $\overrightarrow{DS}$:

$\overrightarrow{DS} = \frac{11}{25}\overrightarrow{AB} = \frac{11}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{r_S}$ =$\overrightarrow{r_D}$+$\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{11}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{5} \\ \frac{41}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.4 \\ 8.2 \end{pmatrix}$



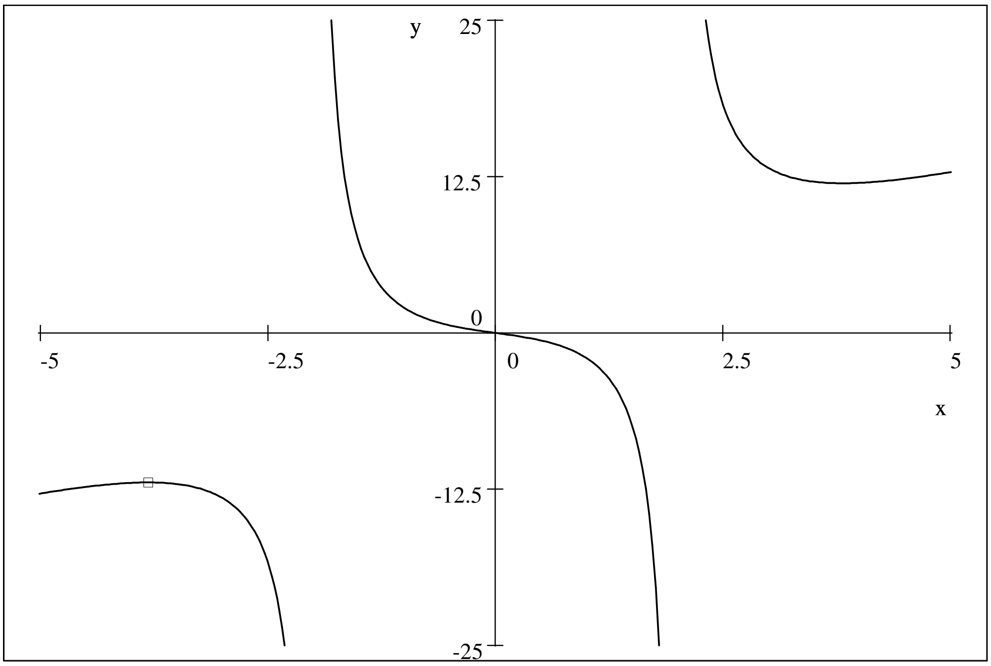
c)

$$\begin{aligned} A &= g \cdot h \\ A &= AB \cdot r \\ A &= 5\sqrt{5} \cdot \frac{11}{\sqrt{5}} = 55 \end{aligned}$$

3. Welche Koordinaten hat der Hochpunkt des Graphen von $f(x) = \frac{ax^3+4x}{x^2-4}$, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ wenn die Tangente an den Graphen in P(1/?) parallel zu der Geraden $14x + 3y + 2 = 0$ ist?
Verwenden Sie nur die bekannten Punkte, um eine Skizze des Graphen zu machen.
Parallel heißt die gleiche Steigung zu haben, also bei x=1 die Steigung m=-14/3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax^3+4x}{x^2-4} \\ f'(x) &= \frac{ax^4-12ax^2-4x^2-16}{(x^2-4)^2} \\ f'(1) &= -\frac{11}{9}a - \frac{20}{9} = -\frac{14}{3} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$f(x) = 2\frac{x^3+2x}{x^2-4}$



$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{x^4-14x^2-8}{(x^2-4)^2} = 0 \\ x^4-14x^2-8 &= 0 \qquad | \text{ Substitution } x^2 = u \\ u_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2+4\cdot 8}}{2} \\ u_{1/2} &= \frac{14 \pm \sqrt{228}}{2} = \frac{14 \pm 2\sqrt{57}}{2} = \sqrt{57} \pm 7 \\ & \underline{x_{1/2} = \pm\sqrt{\sqrt{57}+7}}\,(= \pm 3,8144) \end{aligned}$$

Für das Vorzeichen von f'(x) kommt es nur auf den Zähler an, da der Nenner immer positiv ist. Der Zähler ist eine nach oben geöffnete achsensymmetrische (nur gerade Exponenten) Funktion 4'ten Grades, also wechselt er an der linken Nullstelle (von zweien) vom positiven ins negative und damit ist x_2 ein Maximum $\left(-\sqrt{\sqrt{57}+7}\middle|-11,968\right)$.

4. Einem Halbkreis mit bekanntem Radius r ist ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Seite auf dem Durchmesser liegt.
Wie lang müssen die Rechteckseiten werden, damit der Umfang maximal wird?
Wie gross ist dieser maximale Umfang ?
Die Seite des Rechtecks auf dem Durchmesser sei a, die andere b. Da zwei Ecken auf dem Kreis liegen gilt : $r^2 = b^2 + (a/2)^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{r^2 - b^2}$.
Der Umfang U=2a+2b soll maximal werden :

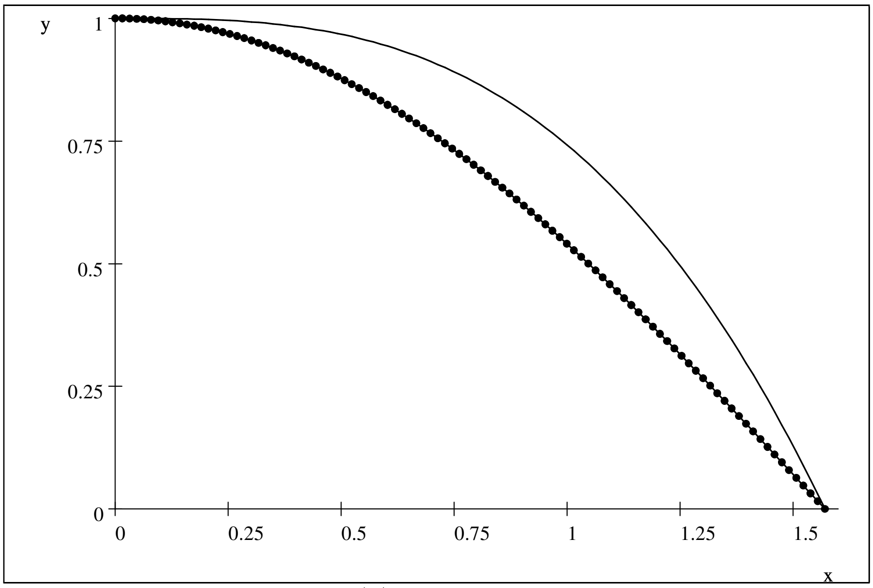
$$\begin{aligned} U &= 2a + 2b \\ U(b) &= 4\sqrt{r^2 - b^2} + 2b \\ D_b &= [0; r] \\ U'(b) &= -4\frac{b}{\sqrt{r^2 - b^2}} + 2 = 0 \\ 4b^2 &= r^2 - b^2 \\ b &= \pm\frac{1}{5}\sqrt{5}r \end{aligned}$$

Am Rand des Definitionsbereichs erhalten wir U(0)=4r und U(r)=2r
Nur $b = +\frac{1}{5}\sqrt{5}r$ liegt in D_b und erfüllt die Probe. Zum Nachweis des Extremums und Feststellung der Art betrachtet man das Vorzeichen von U'(x) links und rechts der Lösung :
links : $U'\left(\frac{1}{5}2r\right) = 0.254\,26 > 0$
rechts : $U'\left(\frac{1}{5}3r\right) = -1.0 < 0$
Also ein Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ und somit ein Maximum $b = +\frac{1}{5}\sqrt{5}r$. Der Umfang des Rechtecks beträgt mit diesem Wert $U = 2\sqrt{5}r$. Dieser Wert ist größer als die Randwerte 4r und 2r, also ein echtes Maximum.
Die Seitenlängen des Rechtecks sind also $b = \frac{1}{5}\sqrt{5}r$ und $a = \frac{4}{5}\sqrt{5}r$.
Der maximale Umfang ist dann : $U = 2\sqrt{5}r$.

5. Berechne eine reelle Zahl a<0, so dass der Graph von $g(x) = ax^3 + 1$, ($D_g = \mathbb{R}$) die Nullstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ besitzt.
Skizziere dann den Graphen von g und $f(x) = \cos x$ $\left(D_f = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ und berechne den Flächeninhalt derjenigen beschränkten Fläche, die durch die beiden Graphen begrenzt wird.

$$\begin{aligned} g(\frac{\pi}{2}) &= a\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + 1 = 0 \\ a &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \end{aligned}$$

$f(x) = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 x^3 + 1$



$f(x)$: ————

$g(x)$: $- \circ - \circ - \circ -$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{x_0} (f(x) - g(x))\, dx \\ A &= \int_0^{x_0} \left(-\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 x^3 + 1 - \cos x\right) dx \\ A &= \left[-\frac{2}{\pi^3}x^4 + x - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ A &= \underline{\frac{3}{8}\pi - 1} \,(= 0,1781) \end{aligned}$$

6. Wir betrachten ein regelmässiges Sechseck ABCDEF und eine Urne, welche 6 mit A-F beschriftete Kugeln enthält; so wird durch das Ziehen der Kugeln ein Eckpunkt des Sechsecks bestimmt.
   a) Wir ziehen aus der Urne drei Kugeln, wobei die gezogene Kugel immer wieder zurückgelegt wird.
   Wie gross ist die WS, dass damit
   1)nur ein Punkt bestimmt wird (also dreimal die gleiche Kugel gezogen wird) ?
   Die erste Ecke ist noch egal, danach ist die WS noch zweimal die gleiche zu erwischen :

$$WS = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} = 2,78\%$$

   2)zwei - aber nicht drei - verschiedene Punkte bestimmt werden und deren Verbindunglinie der Durchmesser des Umkreises des Sechsecks ist ?
   Als Ecken kommen die Kombinationen (A,D);(B,E) und (C,F) in Frage.
   Für (A,D) gibt es die Möglichkeiten : (AAD),(ADA),(DAA) sowie (DDA),(DAD) und (ADD), also insgesamt 6. Für alle 3 Eck-Kombinationen also 18 :

$$WS = \frac{günstige}{mögliche} = \frac{18}{216} = \frac{1}{12} = 8.33\%$$

   3)drei verschieden Punkte bestimmt werden ?

$$WS = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9} = 55,56\%$$

   b) Wir ziehen nun gleichzeitig drei Kugeln.
   Wie gross ist die WS, dass die Verbindungslinien der dadurch bestimmten Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden ?
   Gleichseitige Dreiecke ergeben sich zum Beispiel in der Ziehung ACE, AEC, BDF..., also immer mit der übernächsten Ecke.
   Gleichzeitig Ziehen bedeutet Ziehen ohne Zurüchlegen. Es gibt also $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ mögliche Ziehungen. Bei der ersten Ecke ist es noch egal, welche kommt, also 6 günstige; beim zweiten Ziehen kommen noch 2 Ecken in Frage, bei der letzten noch 1. Es gibt also $6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ günstige Ziehungen.

$$WS = \frac{günstige}{mögliche} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 10\%$$