Mathematik

Kand.-Nr.: ....

Note:

Name, Vorname ....

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und **schreiben Sie nur auf einer Seite der Blätter** !

- Schreiben Sie jedes Antwortblatt einzeln an.
  - Oben links: SMK, Passerellen, Frühjahr 07.
  - Oben rechts: Kand.- Nr., Name / Vorname.
  - Nummerieren Sie die Blätter einzeln.

- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, e, π etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.

- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

- Resultate **ohne Herleitung** geben keine Punkte.

1. a) Von einem Dreieck *ABC* kennen wir die Höhe $h_b = 14.7$ und die Winkel $\beta = 101.4°$ und $\gamma = 35.8°$. Berechnen Sie die Länge der Seiten.

   b) Zeigen Sie, dass $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

---

2. Der Physiker *Frank Benford* beobachtete 1938, dass bei im Alltag auftretenden Zahlen die erste Ziffer mit grösster Wahrscheinlichkeit die 1 ist.
Spätere Untersuchungen führten zum **Gesetz von Benford** :

   Dies besagt, dass die Ziffern k = 1, 2, ..., 9 mit den Wahrscheinlichkeiten
$p(k) = \lg(1 + \frac{1}{k})$ als erste Ziffer auftreten.

   Es gilt also beispielsweise $p(1) = \lg 2$ (lg *ist der Logarithmus zur Basis* 10).

   a) Zeigen Sie, dass exakt gilt: $p(1) + p(2) + \ldots\ldots\ldots\ p(9) = 1$

   b) Aus einem statistischen Jahrbuch werden zufällig 6 Zahlen ausgewählt.

      1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine der 6 Zahlen mit der Ziffer 1 beginnt?

      2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beginnen mindestens 5 Zahlen mit der Ziffer 1?

      3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 6 Zahlen mit der Ziffer 2 beginnen?

---

3. Gegeben sei die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = x(x-k)^2 \quad (k > 0,\ k \in \mathrm{R})$.

   a) Erstellen Sie eine Skizze des Graphen für $k = 2$.
   Wie gross ist der Winkel zwischen Graph und x-Achse ?

   b) Bestimmen Sie nun $k > 0$ derart, dass dieser Winkel 45° beträgt.
   Der Graph von f (mit diesem nun berechneten k) schliesst mit seiner Tangente im Schnittpunkt mit der x-Achse eine Fläche A_1 ein; ausserdem schliesst dieser Graph mit der x-Achse eine zweite Fläche A_2 ein.
   Bestimmen Sie die Flächeninhalte von A_1 und von A_2 .

4. Berechnen Sie $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ ... und suchen Sie dann eine Formel für die *n.* Ableitung $f^{(n)}(x)$, wenn $f(x) = \frac{1}{ax+b} = (ax+b)^{-1}$; a, b e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Wir betrachten nun die Funktion $g(x)$, deren Funktionsvorschrift $f''(x)$ ist.
   Skizzieren Sie den Graphen von g, wenn $a = 1$ und $b = 3$.

5. Bestimmen Sie die reellen Zahlen $a, b \neq 0$ so, dass der Graph der Funktion

   $$f(x) = a\,x\,e^{bx} \text{ mit } D_f = \mathbb{R}$$

   im Punkt $E(2/3)$ eine horizontale Tangente besitzt. (*Lassen Sie die Eulersche Zahl* e *im Resultat stehen !*)

   Diskutieren Sie anschliessend die Funktion.

6. Der Kreis $x^2 + y^2 = 100$ ist der Inkreis eines Rhombus.
   Zwei Seiten dieses Rhombus sind parallel zur x - Achse und die dritte Seite ist eine Tangente in $T(-8\,/\,y_T)$, wobei $y_T < 0$ ist.
   Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rhombus.