Frühjahr 2007

1. a) Von einem Dreieck ABC kenne wir die Höhe $h_b = 14.7$ und die Winkel $\beta = 101.4\,^\circ$ und $\gamma = 35.8\,^\circ$. Berechnen Sie die Längen der Seiten.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 180\,^\circ - \beta - \gamma = 42.\,8\,^\circ \\
h_b &= a \sin\gamma \\
a &= \frac{h_b}{\sin\gamma} = \frac{14.7}{\sin 35.8\,^\circ} = 25.13 \\
h_b &= c \sin\alpha \\
c &= \frac{h_b}{\sin\alpha} = \frac{14.7}{\sin 42.8\,^\circ} = 21.64 \\
b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha = 25.1\cos 35.8\,^\circ + 21.64\cos 42.8\,^\circ = 36.2
\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$ ist.

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta}$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos a}{\cos\beta\cos a}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\beta\cos a}{\cos\beta\cos a}}$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos a}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos a}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos a}{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos a}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

2. Der Physiker Frank Benford beobachtete 1938, dass bei im Alltag auftretenden Zahlen die erste Ziffer mit grösster Wahrscheinlichkeit die 1 ist. Spätere Untersuchungen führten zum Gesetz von Benford :
Dies besagt, dass die Ziffern k = 1, 2, ..., 9 mit den Wahrscheinlichkeiten $p(k) = lg\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ als erste Ziffer auftreten.
Es gilt also beispielsweise p(1) = lg 2 (lg ist der Logarithmus zur Basis 10).
   a) Zeigen Sie, dass exakt gilt: p (1) + p (2) + ... p (9) = 1

$$\begin{aligned} p\left(1\right)+p\left(2\right)+...p\left(9\right) &= 1 \\ lg\left(1+\frac{1}{1}\right)+lg\left(1+\frac{1}{2}\right)+...lg\left(1+\frac{1}{9}\right) &= 1 \\ lg\left(2\right)+lg\left(\frac{3}{2}\right)+\lg\left(\frac{4}{3}\right)+...lg\left(\frac{10}{9}\right) &= 1 \\ \lg\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot...\cdot\frac{10}{9}\right) &= 1 \\ \lg\left(10\right) &= 1 \end{aligned}$$

   b) Aus einem statistischen Jahrbuch werden zufällig 6 Zahlen ausgewählt.
      1)Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine der 6 Zahlen mit der Ziffer 1 beginnt?

$$\begin{aligned} \text{WS(Ziffer ist keine 1)} &= 1-\text{WS(Ziffer ist 1)} \\ \text{WS(Ziffer ist keine 1)} &= 1-\lg\left(2\right) \\ \text{WS(6 mal keine 1)} &= \left(1-\lg\left(2\right)\right)^6 = 11,66\% \end{aligned}$$

      2)Mit welcher Wahrscheinlichkeit beginnen mindestens 5 Zahlen mit der Ziffer 1?

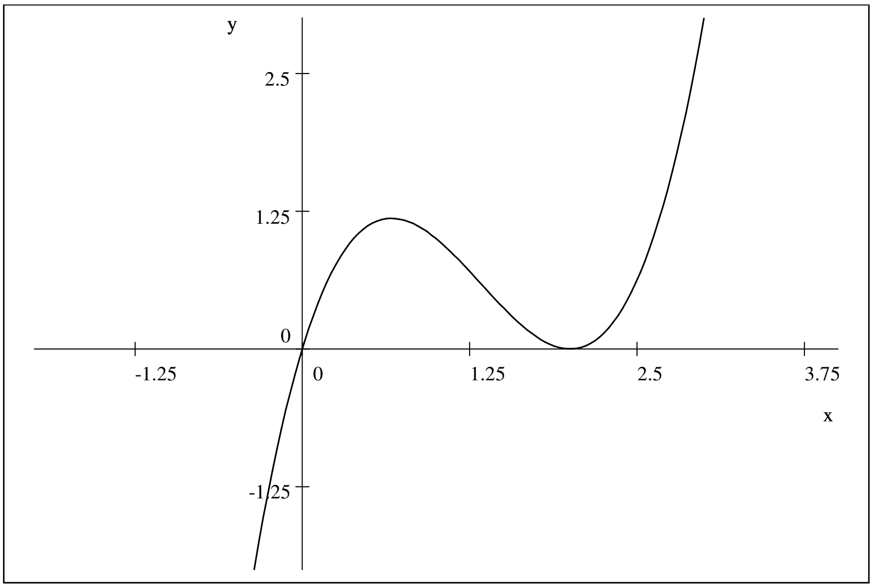
$$\begin{aligned} \text{WS(mindestes 5 Zahlen mit 1)} &= \text{WS(genau 5)+WS(genau 6)} \\ \text{WS(mindestes 5 Zahlen mit 1)} &= \binom{6}{5}\left(\lg 2\right)^5\left(1-\lg 2\right)+\left(\lg 2\right)^6 \\ \text{WS(mindestes 5 Zahlen mit 1)} &= \binom{6}{5}\left(\lg 2\right)^5\left(1-\lg 2\right)+\left(\lg 2\right)^6 = 1,11\% \end{aligned}$$

      3)Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 6 Zahlen mit der Ziffer 2 beginnen?

$$\begin{aligned} \text{WS(alle 6 mit 2)} &= \left(\text{WS(2)}\right)^6 \\ \text{WS(alle 6 mit 2)} &= \left(\lg\left(\frac{3}{2}\right)\right)^6 \\ \text{WS(alle 6 mit 2)} &= 0,00298\% \end{aligned}$$

3. Gegeben sei die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = x\,(x-k)^2 \quad (k > 0, k \in \mathbb{R})$

a) Erstellen Sie eine Skizze des Graphen für k = 2.
Wie gross ist der Winkel zwischen Graph und x-Achse ?
$f(x) = x\,(x-2)^2$

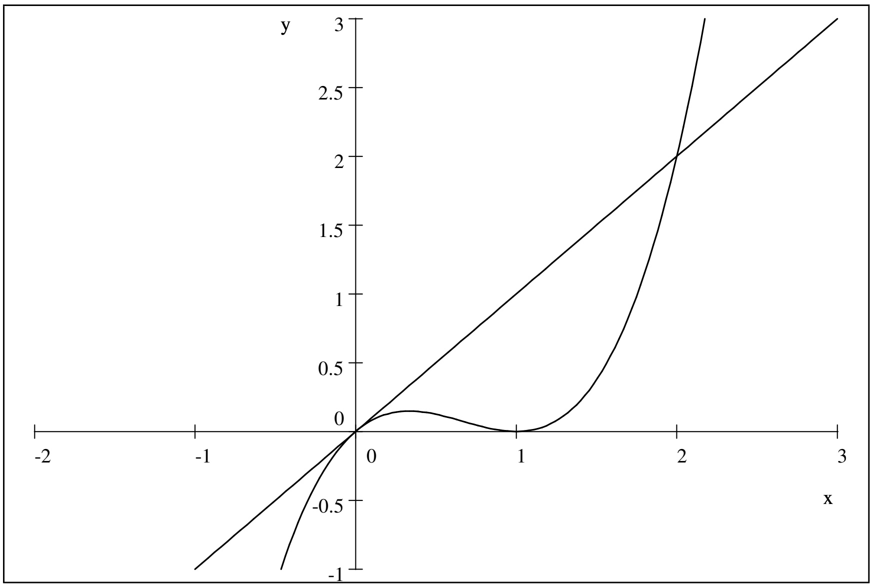


$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\,(x-2)^2 \\
\text{Nullstellen bei x} &= \text{0 (einfach) und x=2 (doppelt)} \\
\text{Da doppelte Nullstellen} & \quad \text{Berührpunkte sind, bleibt x=0} \\
f'(x) &= 3x^2 - 8x + 4 \\
f'(0) &= 4 = \tan\alpha \\
a &= 75,96\,^\circ
\end{aligned}
$$

b) Bestimmen Sie nun k $>$ 0 derart, dass dieser Winkel 45° beträgt. Der Graph von f (mit diesem nun berechneten k) schliesst mit seiner Tangente im Schnittpunkt mit der x-Achse eine Fläche A_1 ein; ausserdem schliesst dieser Graph mit der x-Achse eine zweite Fläche A_2 ein.
Bestimmen Sie die Flächeninhalte von A_1 und von A_2 .

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\,(x-k)^2 \\
f'(x) &= k^2 - 4kx + 3x^2 \\
f'(0) &= k^2 = \tan 45\,^\circ = 1 \\
k &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Laut Aufgabe ist k>0, also k=1.
$f(x) = x\,(x-1)^2 = x - 2x^2 + x^3$



$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^1 f(x)dx \\
A_2 &= \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right) dx \\
A_2 &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\
A_2 &= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Für A_1 muss der Schnittpunkt von f(x) und y=x (der Tangente in x=0 mit $45\,^\circ$) berechnet werden :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \\
x\,(x-1)^2 &= x \qquad |: x \neq 0 \text{(eine Lösung)} \\
(x-1)^2 &= 1 \\
x - 1 &= \pm 1 \\
x_1 &= 0 \text{ und } \mathrm{x}_2 = 2 \\
A_1 &= \int_0^2 (x - f(x))\,dx \\
A_1 &= \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx \\
A_1 &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 \\
A_1 &= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

4. Berechnen Sie $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$... und suchen Sie dann eine Formel für die n. Ableitung $f^{(n)}(x)$, wenn $f(x) = \frac{1}{ax+b} = (ax+b)^{-1}$; $a, b \in R\backslash\{0\}$.
Wir betrachten nun die Funktion g (x) , deren Funktionsvorschrift f ” (x) ist. Skizzieren Sie den Graphen von g , wenn a = 1 und b = 3.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{ax+b} \\
f'(x) &= -\frac{a}{(ax+b)^2} \\
f''(x) &= 2\frac{a^2}{(ax+b)^3} \\
f'''(x) &= -6\frac{a^3}{(ax+b)^4} \\
f''''(x) &= 24\frac{a^4}{(ax+b)^5}
\end{aligned}
$$

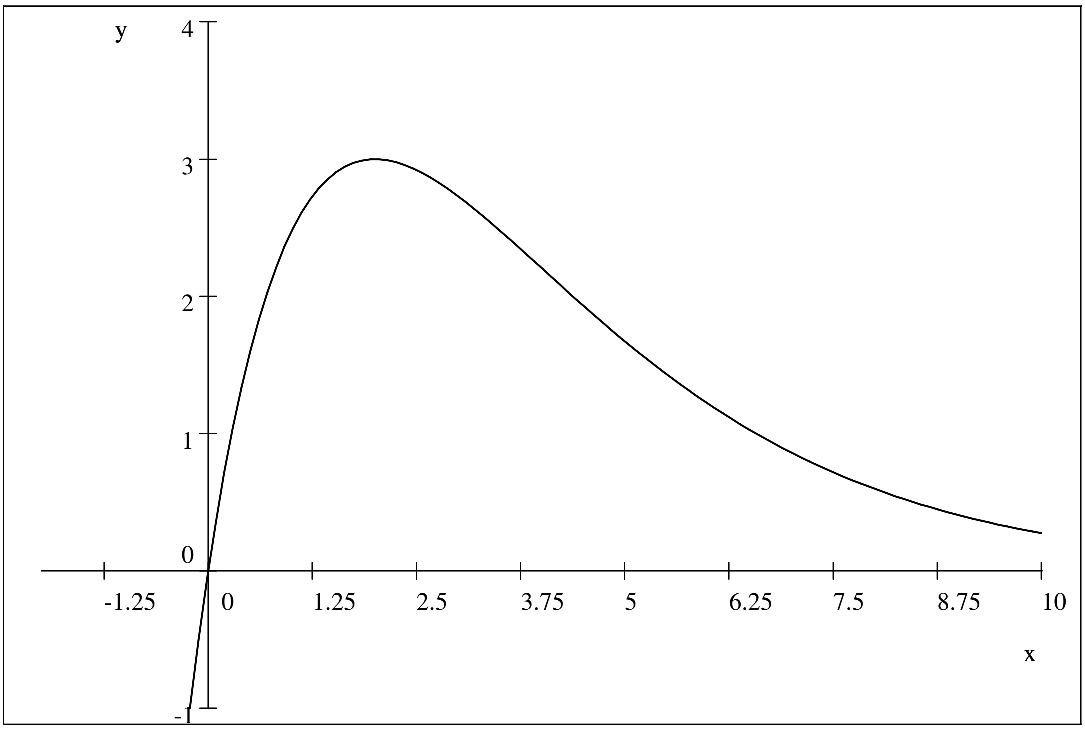
Bei Betrachtung der Ableitungen stellt man fest, dass das Vorzeichen alterniert, was man durch den Faktor $(-1)^n$ erreichen kann (-1 für ungerade n, +1 für gerade). Das a im Zähler hat einen Exponenten der dem Grad der Ableitung entspricht, also a^n, der Nenner ax+b hat gerade eine Potenz mehr $(ax+b)^{n+1}$. Der Vorfaktor entsteht durch fortwährende Multiplikation der natürlichen Zahlen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4..$, .also $n!$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

5. Bestimmen Sie die reellen Zahlen a, b $\neq 0$ so, dass der Graph der Funktion $f(x) = axe^{bx}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ im Punkt E (2/3) eine horizontale Tangente besitzt. (Lassen Sie die Eulersche Zahl e im Resultat stehen !)
Diskutieren Sie anschliessend die Funktion.

$$\begin{aligned}
f(x) &= axe^{bx} \\
f'(x) &= ae^{bx} + abxe^{bx} \\
I.f(2) &= 3 \\
II.f'(2) &= 0 \\
I.a2e^{2b} &= 3 \\
a &= \frac{3}{2e^{2b}} \\
II.ae^{2b} + ab2e^{2b} &= 0 \\
ae^{2b}(1+2b) &= 0 \\
b &= -\frac{1}{2} \\
\text{in I.} &: \\
a &= \frac{3}{2}e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{2}exe^{-\frac{1}{2}x} = \frac{3}{2}xe^{-\frac{1}{2}x+1} \\
f'(x) &= \frac{3}{2}e^{1-\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}xe^{1-\frac{1}{2}x} \\
f''(x) &= \frac{3}{8}xe^{1-\frac{1}{2}x} - \frac{3}{2}e^{1-\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$



$D = \mathbb{R}$.Die Funktion hat eine Nullstelle bei x=0. Für $x \to \infty$ geht sie gegen 0 (Exponentialfunktionen fallen stärker als jede

Potenzfunktion). Der positive Teil der x-Achse ist also waagerechte Asymptote.

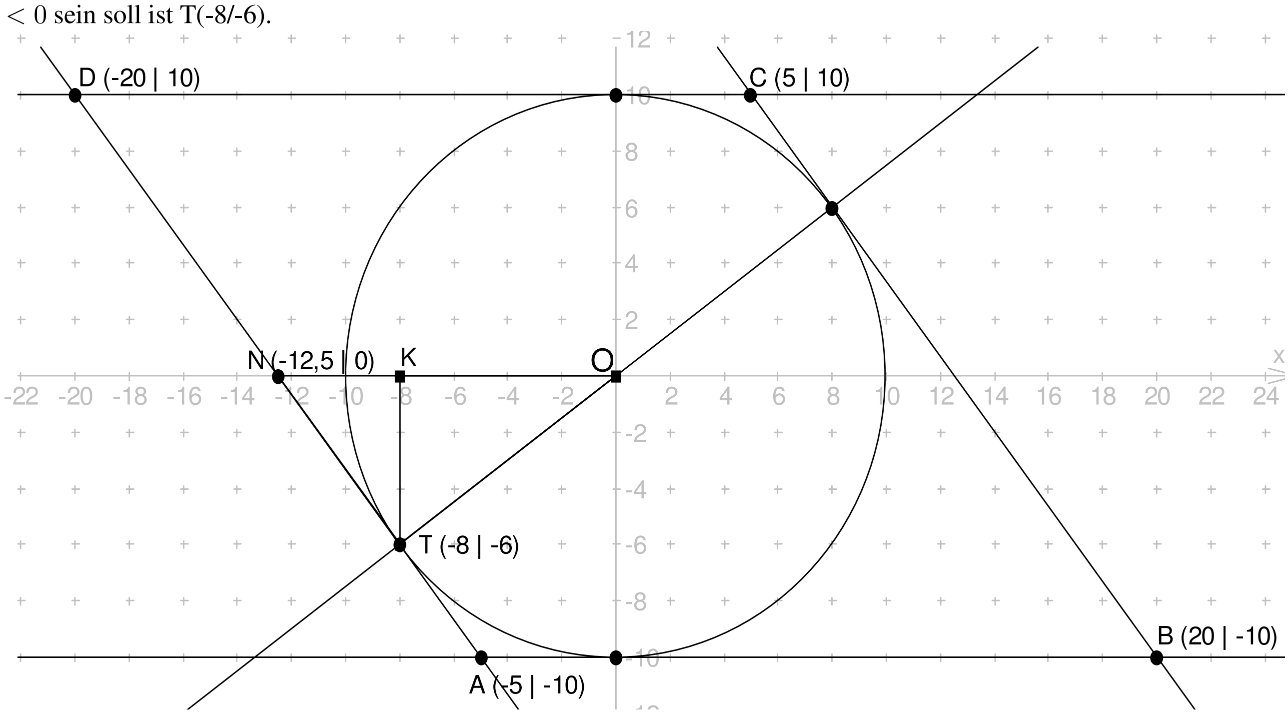
$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{3}{2}e^{1-\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}xe^{1-\frac{1}{2}x} &= 0 \\ -\frac{3}{4}\left(e^{1-\frac{1}{2}x}\right)(x-2) &= 0 \\ \text{Da Exponentialfunktionen nie Null werden ist x} &= \text{2 die einzige Stelle mit waagerechter Tangente} \\ f''(2) &= \frac{3}{4} - \frac{3}{2} < 0, \text{ also ein Maximum(3|2)} \\ f''(x) &= \frac{3}{8}xe^{1-\frac{1}{2}x} - \frac{3}{2}e^{1-\frac{1}{2}x} = 0 \\ \frac{3}{8}\left(e^{1-\frac{1}{2}x}\right)(x-4) &= 0 \\ x &= \text{4 ist Kandidat für Wendepunkt.} \end{aligned}$$

Da $\frac{3}{8}\left(e^{1-\frac{1}{2}x}\right) > 0$ immer positiv ist und x-4 bei x=4 das Vorzeichen wechselt, ist $\left(4 \,\middle|\, \frac{6}{e}\right)$ ein Wendepunkt´.

6. Der Kreis $x^2 + y^2 = 100$ ist der Inkreis eines Rhombus. Zwei Seiten dieses Rhombus sind parallel zur x - Achse und die dritte Seite ist eine Tangente in $T(-8/y_T)$, wobei $y_T < 0$ ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rhombus.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100 \\ 64 + y^2 &= 100 \\ y^2 &= 36 \\ y &= \pm 6 \end{aligned}$$

Da $y_T < 0$ sein soll ist T(-8/-6).



Die Fläche des Rhombus (Raute) ergibt sich aus der Grundlinie AB und der Höhe $2r = d = 10$ mit $A = AB \cdot d = AB \cdot 20$.
Die Grundlinie AB ist doppelt so lang wie ON (N ist der Schnittpunkt der Tangente in T mit der x-Achse). Das Dreieck OTN ist ähnlich OKT. Es gilt also :

$$\begin{aligned} \frac{OK}{OT} &= \frac{OT}{ON} \\ ON &= \frac{OT^2}{OK} = \frac{100}{8} = 12,5 \end{aligned}$$

Also ist $AB = 2 \cdot ON = 25$ und somit A=500.
Andere Möglichkeit : Die Tangente steht senkrecht auf OT, hat also die Gleichung :

$$t \quad : \quad \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

t erreicht z.B. y=-10 bei :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ -10 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \\ \lambda &= \frac{1}{2} \\ x &= -5 \end{aligned}$$

ebenso y=10 bei x=-20

Aus Symmetriegründen ergibt sich zu A(-5/-10) B(20/-10) und somit AB=25.