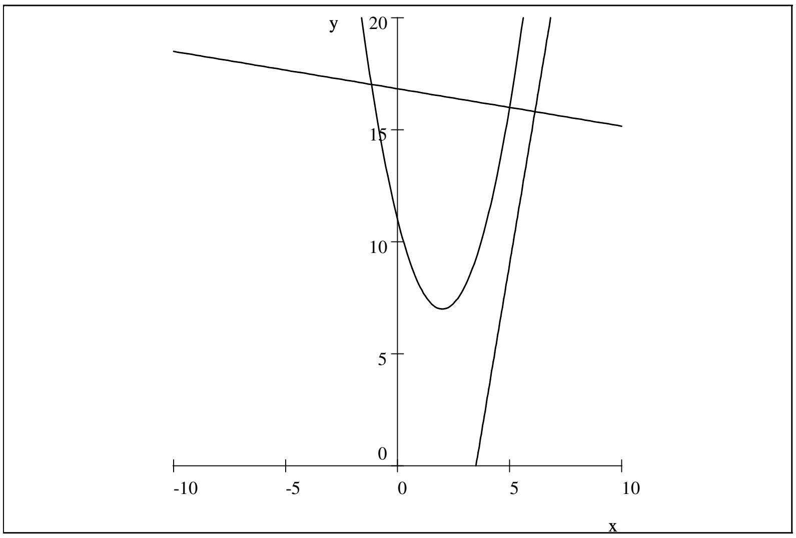
Frühjahr 2008

1. Welcher Punkt d e r G e r a d e n $y = 6x - 21$ liegt dem Graphen von $f(x) = x^2 - 4x + 11$ mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ am nächsten ?



Der Punkt auf f, der der Geraden am nächsten liegt, hat die gleiche Steigung wie sie. Also

$$\begin{aligned} f\prime(x) &= 2x - 4 = 6 \\ x &= 5 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

Durch ihn geht die Normale, die g im gesuchten Punkt schneidet :

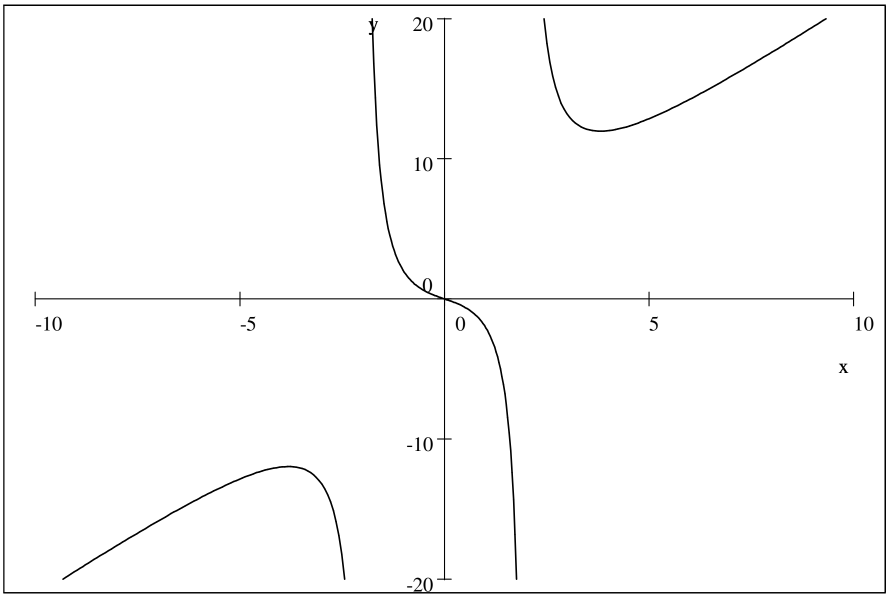
$$\begin{aligned} n &: \ y = -\frac{1}{6}(x-5) + 16 \\ n &= g \\ x &= \frac{227}{37} \\ y &= \frac{585}{37} \end{aligned}$$

2. Welche Koordinaten hat der Tiefpunkt des Graphen von $f(x) = \frac{ax^3+4x}{x^2-4}$; $a \neq 0$; $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, wenn die Tangente an den Graphen in P $(1|?)$ parallel zur Geraden $14x + 3y + 2 = 0$ ist ?
   Parallel sein bedeutet die gleiche Steigung zu haben:

$$\begin{aligned} f\prime(1) &= -\frac{14}{3} \\ f\prime(x) &= \frac{ax^4 - 12ax^2 - 4x^2 - 16}{(x^2-2)^2} \\ f\prime(1) &= \frac{-11a-20}{9} = -\frac{14}{3} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\prime(x) &= 2\frac{x^4 - 14x^2 - 8}{(x^2-2)^2} = 0 \\ x_1 &= \sqrt{\sqrt{57}+7} = 3.8144; y_1 = 11.968 \\ x_2 &= -\sqrt{\sqrt{57}+7} = -3.8144; y_2 = -11.968 \end{aligned}$$

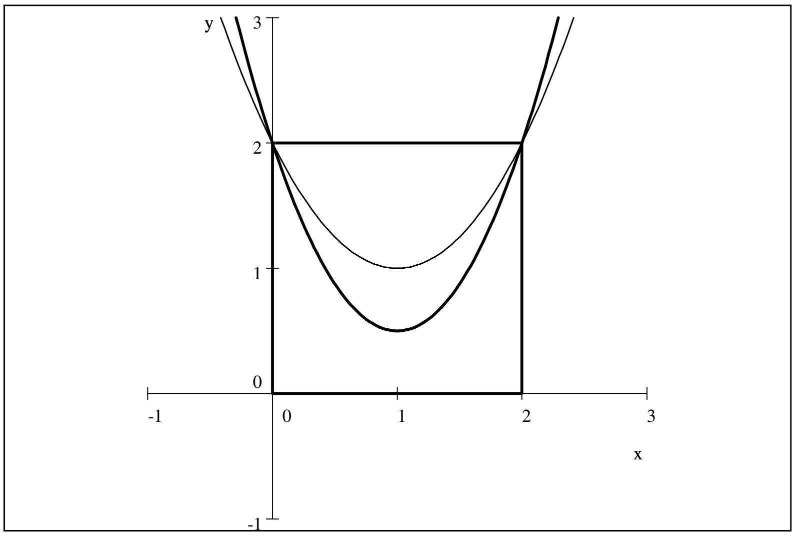
Vorzeichentabelle ergibt : P_1 ist Tief-, P_2 ist Hochpunkt



3. Der Graph G_g der Funktion g entsteht aus dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ mit Defintionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ durch Verschieben um eine Einheit in x-Richtung (also nach rechts) und um eine Einheit in y-Richtung (also nach oben).

a) Zeigen Sie, dass G_g durch die Eckpunkte C ; D des Quadrates mit den Eckpunkten A(0|0); B(2|0); C(2|2) und D(0|2) geht.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2+1 \\ f(2) &= 2 \\ f(0) &= 2 \end{aligned}$$



b) G_g unterteilt das Quadrat ABCD in zwei Teilflächen mit den Inhalten A_1 und A_2. Bestimmen Sie das Verhältnis $A_1 : A_2$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^2 f(x)dx \\ A_1 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^2 \\ A_1 &= \frac{8}{3} \\ A_2 &= A - A_1 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \\ A_1 &: A_2 = 2:1 \end{aligned}$$

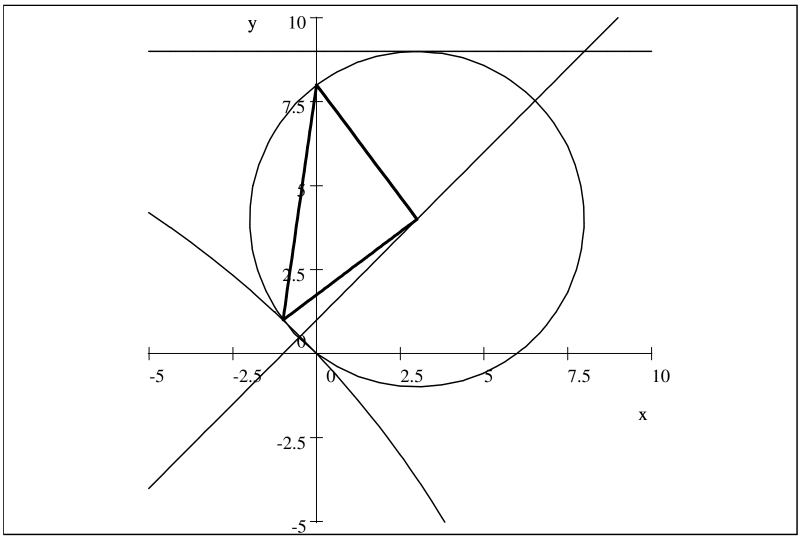
c) Bestimmen Sie die Vorschrift einer quadratischen Funktion h, so dass G_h ebenfalls durch C und D geht und die Quadratfläche in zwei flächengleiche Teile teilt.

$$\begin{aligned} h(x) &= a(x-1)^2+b \\ h(0) &= 2 = a+b \\ b &= 2-a \\ h(x) &= a(x-1)^2+2-a \\ \int_0^2 h(x)dx &= 2 \\ \left[\frac{a}{3}x^3 - ax^2 + 2x\right]_0^2 &= 2 \\ a &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4. Spieler A besitzt einen Würfel, dessen Seitenflächen mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 beschriftet sind; diese Zahlen treten beim Werfen des Würfels alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.
Spieler B besitzt ein Oktaeder, dessen Seitenflächen anlaog mit 1 bis 8 beschriftet sind; diese Zahlen treten beim Werfen des Oktaeders alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.
   a) Beide Spieler werfen ihren Körper.
      i. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die gleiche Zahl erzielen ?
$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot 6 = \frac{1}{8}$$
      ii. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl von A um mindestens 2 größer als diejenige von B ist ?
Die möglichen Kombinationen sind {(3,1);(4,1+2);(5,1+2+3);(6,1+2+3+4)} (A,B), also 10 Stück, jede mit der WS von 1/48 :
$$P = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$$
      iii. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Zahlen 11 ist?
Die möglichen Kombinationen sind{8,3; 7,4; 6,5; 5,6}, also 4 Stück, d.h.
$$P = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$
   b) A hat eine 6 geworfen.
      i. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass B mit 10 Würfen mindestens einmal eine größere Zahl erzielt?
Die Möglichkeiten für eine größere Zahl sind die 7 und die 8, also eine WS von 2/8=1/4.
Die WS, dass dies in 10 Würfen mindestens einmal passiert ist gleich 1 weniger die WS, dass es nie passiert :
$$P = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \frac{989\,527}{1048\,576} = 94,4\%$$
      ii. Wie viele Würfe muss man B zugestehen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass er die Zahl von A mindestens einmal übertreffen soll, größer als $\frac{999}{1000}$ sein soll?
$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n} &> \frac{999}{1000} \\ n &> \frac{\ln \frac{1}{1000}}{\ln \frac{3}{4}} = 24,012 \\ n &\geqslant 25 \end{aligned}$$

5. Eine Kreislinie enthält den Punkt P(-1|1) , berührt die Gerade mit der Gleichung y = 9 und hat den Mittelpunkt M auf der Geraden mit der Gleichung $x - y + 1 = 0$.
   a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden möglichen Kreislinien.

$$
\begin{aligned}
\text{Für den Mittelpunkt des Kreises gelten folgende Bedingungen} &:\\
\text{er liegt auf der Geraden}&\\
I. y &= x+1\\
\text{sein Abstand zu y=9 muss gleich R sein}&\\
II. 9-y &= R\\
\text{sein Abstand zu P muss gleich R sein}&\\
III. (x+1)^2+(y-1)^2 &= R^2\\
\text{I. und II. in II.} &:\\
R^2-34R+145 &= 0\\
R_1=5, y_M=4, x_M=3&\\
R_2=29, y_M=-20, x_M=-21&
\end{aligned}
$$



   b) Wählen Sie nun diejenige Kreisline mit dem kleineren Radius; diese schneidet die y-Achse in zwei Punkten. Bestimmen Sie denjenigen Punkt S mit $y_S > 0$.

$$
\begin{aligned}
k &: (x-3)^2+(y-4)^2=25\\
x &= 0\\
y_1 &= 8, y_2 = 0\\
y_S &= 8
\end{aligned}
$$

Betrachten Sie nun das Dreieck MPS und berechnen Sie dessen Innenwinkel.

$$
\begin{aligned}
PS &= \sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}\\
PM &= 5\\
MS &= 5
\end{aligned}
$$

Da $PS^2 = PM^2 + MS^2$, ist das Dreieck rechtwinklig. 90° bei M. Da es auch gleichschenklig ist, sind die anderen beiden Winkel gleich 45°.

6. (a) Berechnen Sie cos 75° exakt (dh . mit Hilfe von Wurzeltermen).

$$
\begin{aligned}
\cos(75^\circ) &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\
\cos(45^\circ + 30^\circ) &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
\cos(75^\circ) &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\
\cos(75^\circ) &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

(b) Von einem Drachenviereck ABCD kennen wir α (in A) = 127°,γ (in C) = 82° und e = |AC| = 9,73
Berechnen Sie a =|AB| und b =|BC| .

$$
\begin{aligned}
I. a \sin\left(\frac{127^\circ}{2}\right) &= b \sin\left(\frac{82^\circ}{2}\right) \\
II. a \cos\left(\frac{127^\circ}{2}\right) + b\cos\left(\frac{82^\circ}{2}\right) &= 9,72 \\
I. \text{ in } II. &: \\
b\frac{\sin 41^\circ}{\sin 63,5^\circ} \cos\left(\frac{127^\circ}{2}\right) + b\cos\left(\frac{82^\circ}{2}\right) &= 9,72 \\
\frac{9,72}{\frac{\sin 41^\circ}{\sin 63{,}5^\circ}\cos\left(\frac{127^\circ}{2}\right) + \cos\left(\frac{82^\circ}{2}\right)} &= b \\
b &= 8,99 \\
a &= 6,59 \\
\text{oder mit dem Sinussatz} &: \\
a = \frac{e}{\sin(180^\circ - 41^\circ - 63.5^\circ)} \sin 41^\circ &= 6,59 \\
b = \frac{e}{\sin(180^\circ - 41^\circ - 63.5^\circ)} \sin 63,5^\circ &= 8,99
\end{aligned}
$$