Schweizerische Maturitätskommission SMK
Ergänzungsprüfung Passerelle "Berufsmaturität – universitäre Hochschulen" Winter 2011
Mathematik

Die Prüfung dauert 4 Stunden.

Kand-Nr : ....

Note :

Name, Vorname ....

Erreichte Punktzahl :
Korrigiert von :

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und **schreiben Sie nur auf einer Seite der Blätter** !
- Schreiben Sie jedes Antwortblatt einzeln an.
  - Oben links: SMK Passerelle Winter 11
  - Oben rechts: Kand.-Nummer, Name und Vorname
  - Nummerieren Sie die Blätter einzeln.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, **e**, π etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.
- Resultate **ohne Herleitung** geben keine Punkte.
- Auf saubere Darstellung wird Wert gelegt.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !

Müller, Strickler

M A T H E M A T I K

1. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von

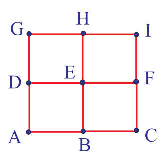
$$f(x) = \frac{-x^2}{4} + \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad g(x) = \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{mit} \quad D_f = D_g = \mathbb{R}$$

und skizzieren (*nur skizzieren, nicht diskutieren !*) Sie dann beide Graphen im gleichen Koordinatensystem.
Wie gross ist der Flächeninhalt der grössten durch G_f und G_g begrenzten beschränkten Fläche ?

2. (a) Leiten Sie **mit Hilfe des Differentialquotienten** die erste Ableitung von $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ her.
   (Hinweis: Zum Vereinfachen die Wurzel aus dem Zähler des Differentialquotienten schaffen)
   Lösungen, welche die Ketten-, Produkt- oder Quotientenregel verwenden, ergeben 0 Punkte.

   (b) Wie müssen wir $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wählen, damit die beiden horizontalen Tangenten des Graphen von $f(x) = bx^3 - x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ den Abstand 1 besitzen ?

3. In einem quadratischen Gitter sind die neun Punkte A, B, C, D, E, F, G, H und I wie unten gezeichnet angeordnet:



Wir wählen nun zufällig drei verschiedene Punkte aus.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(a) Keine zwei Punkte liegen in der gleichen Zeile oder in der gleichen Spalte.

(b) Keiner der vier Punkte A, C, G und I ist gewählt worden.

(c) Alle drei gewählten Punkte liegen auf einer Geraden.

(d) Ein Versuch besteht nun darin, zufällig einen Punkt auszuwählen und zu färben.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 15-maliger Durchführung des Versuchs der Punkt E mindestens einmal gefärbt wird?

4. Der Kreis k geht durch die Punkte $A(8/17)$ und $B(16/13)$ und sein Mittelpunkt liegt auf der Geraden $g : x + y - 24 = 0$.

   (a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r des Kreises k.

   (b) Bestimmen Sie die Länge des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ (wählen Sie denjenigen Bogen, dessen Zentriwinkel kleiner als π ist).

   (c) Die beiden Kreistangenten in A und in B schneiden sich in einem Punkt T. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $AMBT$.

5. (a) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 2x \cdot \mathbf{e}^{-2x^2}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
   Berechnen Sie die Hoch- und Tiefpunkte von f und skizzieren Sie den Graphen.
   Es ist $F(x) = k \cdot \mathbf{e}^{-2x^2}$ eine Stammfunktion von f; bestimmen Sie $k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
   Berechnen Sie nun den Inhalt der unbeschränkten Fläche, welche durch G_f und die positive x-Achse begrenzt wird.

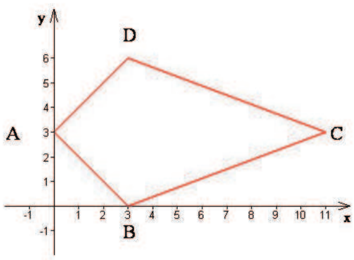
   (b) Bestimmen Sie a und b so, dass $H(2/2)$ ein Hochpunkt von

   $$f(x) = a \cdot x \cdot \mathbf{e}^{bx^2} \quad \text{mit} \quad D_f = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a\,,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   wird.

6. (a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn
   $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ und $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 0$.

   (b) Ein Drachenviereck $ABCD$ liegt so im Koordinatensystem, dass die Diagonale AC parallel zur x- und die Diagonale BD parallel zur y-Achse sind (*siehe untenstehende Zeichnung*).



   Berechnen Sie den Flächeninalt des Drachenvierecks, wenn $A(0/3)$, $B(3/0)$ und Winkel $\gamma = 45°$ (in C) bekannt sind.