



Ergänzungsprüfung Passerelle 'Berufsmaturität/Fachmaturität – universitäre Hochschulen'  
Winter 2021

## Mathematik

Kand.-Nr.:

.....

Name, Vorname:

.....

Erreichte Punktzahl:

.....

Note:

.....

Korrigierende(r):

.....

Fach:

**Mathematik**

Dauer:

**3 Stunden**

Zugelassene Hilfsmittel:

1 Formelsammlung,  
1 Taschenrechner (Casio FX-82Solar/Solar II, TI-30 ECO RS)

Maximale Punktzahl:

40 Punkte

Autoren:

Donat A. Graven, Martin Fischer, Sandra Egli

Hinweise:

1. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und beschreiben Sie das Blatt nur auf einer Seite.
2. Schreiben Sie jedes Antwortblatt einzeln an:  
- oben links: SMK-Passerelle, Winter 2021;  
- oben rechts: Kand.-Nummer, Name und Vorname.
3. Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d. h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $e$ ,  $\pi$  etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z. B. auf 3 wesentliche Ziffern.
4. Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 werden 36 Punkte verlangt.
5. Resultate ohne Herleitung geben keine Punkte.
6. Auf eine saubere Darstellung wird Wert gelegt.

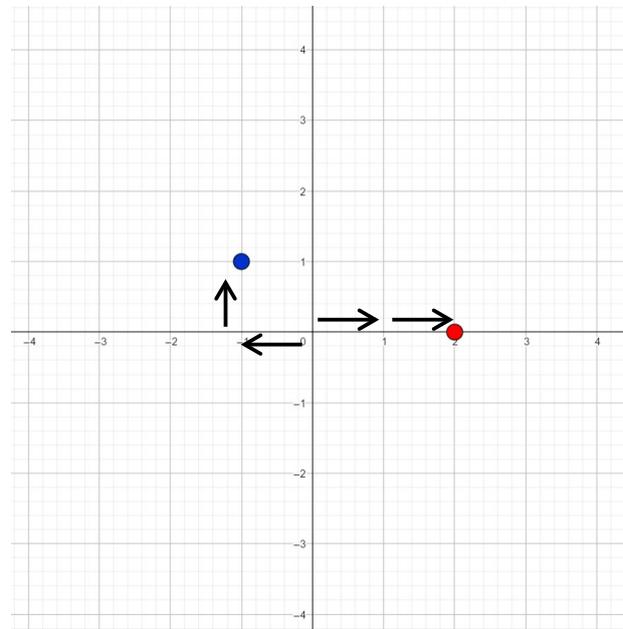
Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

# M A T H E M A T I K

1. Gegeben sei der Kreis  $k_a: (x - 1)^2 + (y - a)^2 = (a + 2)^2; a \in \mathbb{R}, a \neq -2$ .
  - (a) Zeichnen Sie den Kreis  $k_{-1}$  in einem Koordinatensystem (Einheit: 2 cm).
  - (b) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  geht der Kreis  $k_a$  durch den Koordinatenursprung?
  - (c) Für welche  $a \in \mathbb{R}$  schneidet der Kreis  $k_a$  bei  $y = 3$  die  $y$ -Achse?
  - (d) Der Punkt  $P(a/4)$  soll auf dem Kreis  $k_a$  liegen. Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist dies möglich, und wie lautet dann jeweils die Gleichung einer Tangente an den Kreis durch  $P$ ?
  
2. Gegeben sei die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 14x + 40); x \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Berechnen Sie alle Nullstellen und Extrema, und zeichnen Sie einen Graphen von  $f$  (Einheit: 1 cm).
  - (b) Wo schneidet eine Tangente mit Steigung  $-2$  an den Graphen von  $f$  die  $y$ -Achse?
  - (c) Zeigen Sie: Die Graphen von  $g(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 14x + 49)$  und  $h(x) = \frac{1}{10}(x - 7)^3$  berühren sich in einem Punkt  $B$  und schneiden sich in einem weiteren Punkt  $S$ .
  - (d) Berechnen Sie den Inhalt des von  $g$  und  $h$  eingeschlossenen endlichen Flächenstücks.

3. Ein Käfer startet zur Zeit 0 im Koordinatenursprung  $(0/0)$  eine Wanderung, bei der er jede Minute seine Position um eine Einheit nach rechts, links, oben oder unten jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{4}$  ändert.

- (a) Die Wanderung des Käfers dauert 2 Minuten; nebenstehende Figur zeigt 2 mögliche Wege mit den Endstandorten  $(-1/1)$  bzw.  $(2/0)$ .
- (i) Geben Sie die Koordinaten aller Punkte an, die der Käfer nach 2 Minuten erreichen kann.
- (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Käfer nach 2 Minuten auf der  $x$ -Achse?



- (b) Nun dauert die Wanderung 3 Minuten.
- (i) Wie viele verschiedene Wege kann der Käfer absolvieren?
- (ii) Der Käfer sei nach 3 Minuten in  $(1/0)$  angekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ihn der Weg über den Punkt  $(2/0)$  geführt?

#### 4. Zwei voneinander unabhängige Aufgaben

4.1 Gegeben sind zwei Ebenen  $E$  und  $F$  und ein Punkt  $P$ .  $E$  ist durch ihre Koordinatengleichung gegeben:  $2x - 4y + z + 7 = 0$ ,  $F$  ist durch drei auf ihr liegende Punkte  $A(2/0/-2)$ ,  $B(1/2/11)$  und  $C(0/1/9)$  gegeben. Der Punkt  $P$  ist durch seine Koordinaten bestimmt:  $P(5/2/-3)$ .

Geben Sie die Koordinatengleichung einer dritten Ebene  $G$  an, die den Punkt  $P$  enthält und normal zu  $E$  und  $F$  steht.

4.2 Die Figur nebenan zeigt ein Beispiel eines gleichschenkligen Dreiecks mit Spitze im Koordinatenursprung und Basis  $PQ$  parallel zur  $x$ -Achse so, dass die Endpunkte auf dem Graphen der Kurve  $f: y = e^{-x^2}$  liegen. Für welche Koordinaten der beiden Punkte  $P$  und  $Q$  ist der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks maximal?

