

Mathematik

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, e , π etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Bestimme die Punkte mit horizontalen Tangenten des Graphen G_f von

$$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 3 \text{ mit } D_f = \mathbb{R}$$

und skizziere den Graphen G_f .

Berechne nun den Flächeninhalt der beschränkten Fläche, welche von G_f und der Tangente im Tiefpunkt begrenzt wird.

2. Sanguinetti besitzt einen gezinkten Würfel, bei welchem die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{12}$ erscheint. Die übrigen Augenzahlen haben gleiche Wahrscheinlichkeit (je $\frac{1}{6}$).

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dreimal hintereinander die gleiche Zahl zu würfeln.
- Corleone hat in zwei Würfeln total 5 Augen geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 dabei war ?
- Wie oft muss Vanzetti würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit $p \geq 0,995$ mindestens einmal eine 6 zu würfeln ?

3. Durch die Vorschrift $f_k(x) = kx - k^2x^2$ ($k \in \mathbb{R}, k > 0$) ist eine Parabelschar gegeben.
- Zeichne in einem Koordinatensystem mit der Einheit 10cm die Parabeln für $k = 1$ und $k = 4$.
 - Bestimme allgemein (d.h. in Abhängigkeit von k) die Nullstellen und Extremalstellen der Parabeln.
 - Zeige, dass alle Parabelscheiden auf einer Geraden liegen.
 - Bestimme k derart, dass $\frac{1}{4}$ der Inhalt derjenigen beschränkten Fläche ist, die von der Parabel mit der x -Achse eingeschlossen wird.
4. Von einem Sehnenviereck (ein Viereck mit Umkreis) $ABCD$ kennen wir $a = |AB| = 5$, $c = |CD| = 4.3$, die Diagonale $|AC| = e = 5.4$ und den Winkel $\beta = 94^\circ$ in Ecke B . Suche die Länge der Seiten b , d und den Winkel α in Ecke A .
5. a) Gegeben sind die Gerade g und die Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b} durch
- $$g: \vec{p} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
- Dabei ist O der Koordinatenursprung.
- Bestimme den Abstand der Geraden g vom Ursprung und den Fusspunkt F dieses Abstandes.
 - Stelle den Vektor $\vec{f} = \overrightarrow{OF}$ als Linearkombination von \vec{a} und \vec{b} dar.
- b) Die Flächeninhalte zweier Kreise K_1 mit Mittelpunkt $M_1(-5/0)$ und K_2 mit Mittelpunkt $M_2(4/12)$ verhalten sich wie $4 : 1$.
Die beiden Kreisflächen besitzen einen einzigen gemeinsamen Punkt T .
Bestimme T und die Gleichung der gemeinsamen Kreistangente in T .
6. Wie müssen wir Quadratseite und Höhe einer geraden quadratischen Pyramide wählen, wenn die Oberfläche 200 beträgt und das Volumen maximal werden soll ?