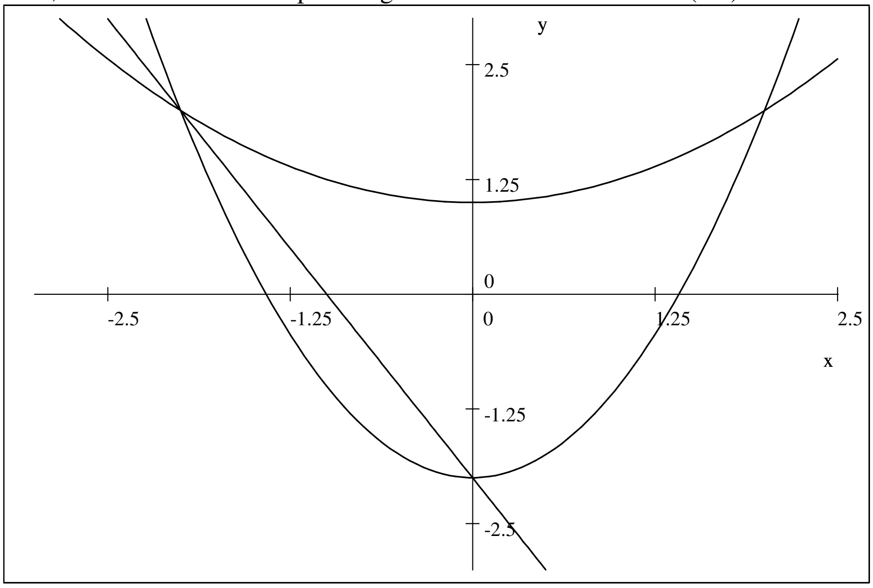
Herbst 2007

1. Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ und $h(x) = -2x - 2, D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$ und berechnen Sie dann den Inhalt der Fläche, die durch die drei Graphen begrenzt wird und den Punkt A(0/0) enthält.



$$\begin{array}{rcl} \text{f und g schneiden sich in} & : & \\ x^2 - 2 & = & \frac{x^2}{4} + 1 \\ & & A(-2/2) \text{ und } B(2/2) \\ \text{f und h schneiden sich in} & : & \\ x^2 - 2 & = & -2x - 2 \\ & & A(-2/2) \text{ und } C(0/-2) \\ \text{g und h schneiden sich in} & : & \\ \frac{x^2}{4} + 1 & = & -2x - 2 \\ & & A(-2/2) \text{ und } D(-6/10) \end{array}$$

Die gesuchte Fläche liegt im Bereich von -2 bis 0 zwischen g und h, im Bereich von 0 bis 2 zwischen g und f :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} \left(\frac{x^2}{4} + 1 - (-2x - 2) \right) dx + \int_{0}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + 1 - \left(x^2 - 2 \right) \right) dx \\ A &= \left[3x + x^2 + \frac{1}{12} x^3 \right]_{-2}^{0} + \left[3x - \frac{1}{4} x^3 \right]_{0}^{2} \\ A &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

2. Ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkellängen a=b rotiert um die Basis. Wie gross müssen die Basiswinkel gewählt werden, damit der enstandene Doppelkegel maximales Volumen hat?
   Die Höhe h des Dreiecks ist $h = a \cdot \sin\alpha$. Diese Höhe ist der Radius R der Grundfläche des Doppelkegels.
   Die Basis g ist $g = 2 \cdot a \cdot \cos\alpha$ ist die Höhe des Doppelkegels. Also $a \cdot \cos\alpha$ die Höhe H eines Kegels.

$$\begin{aligned}
V &= 2\frac{1}{3}GH = \frac{2}{3}R^2\pi H = \frac{2}{3}\pi\left(a \cdot \sin\alpha\right)^2 a \cdot \cos\alpha \\
V &= \frac{2}{3}\pi a^3 \cos\alpha \sin^2\alpha = \frac{2}{3}\pi a^3 \left(\cos\alpha - \cos^3\alpha\right) \\
V' &= \frac{2}{3}\pi a^3 \left(-\sin\alpha + 3\cos^2\alpha \sin\alpha\right) = 0 \\
\alpha_1 &= 0^\circ, \alpha_2 = 180^\circ, \alpha_3 = 54.74^\circ, \alpha_4 = 305.26^\circ, \alpha_5 = 125.3^\circ, \alpha_6 = 305.3^\circ
\end{aligned}$$

   Von diesen Winkeln ist nur α_3 relevant.

$$\begin{aligned}
V'(50^\circ) &> 0 \\
V'(55^\circ) &< 0
\end{aligned}$$

   Also ist α_3 ein Maximum.

3. Ein gewöhnlicher (idealer) Spielwürfel wird dreimal gewürfelt. Die dabei erhaltenen Augenzahlen a, b und c seien die Masszahlen der Kantenlängen eines Quaders.
   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Quader ein Würfel ist?

$$P = \frac{günstige}{mögliche} = \frac{|\{111, 222, 333, 444, 555, 666\}|}{6^3} = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Rauminhalt des Quaders mindestens 140 beträgt?
   $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216, 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180, 6 \cdot 6 \cdot 4 = 144, 6 \cdot 5 \cdot 5 = 150, 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125, 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
   Für 666 gibt es nur eine Möglichkeit, für 665, 664 und 655 jeweils 3 Möglichkeiten.

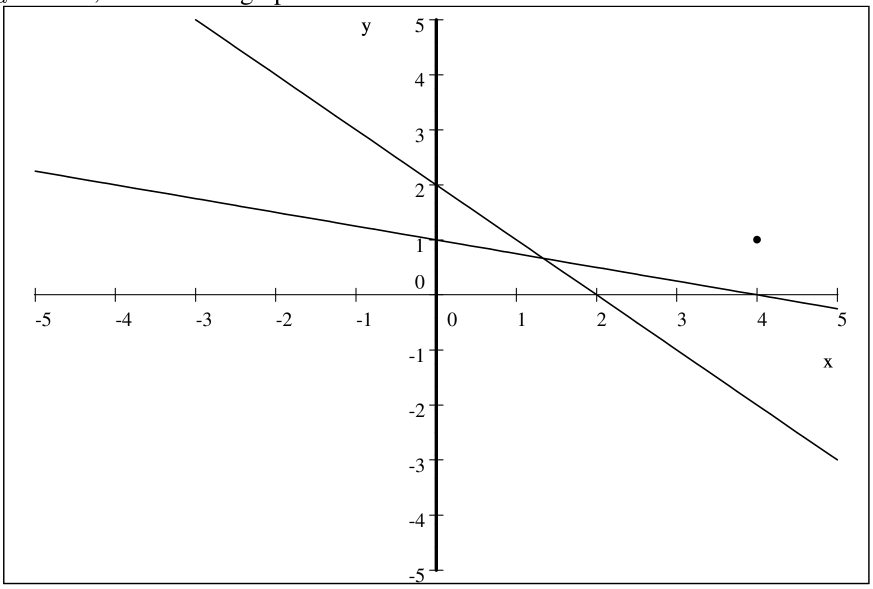
$$P = \frac{günstige}{mögliche} = \frac{1+3+3+3}{6^3} = \frac{10}{6^3} = \frac{10}{216}$$

   c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masszahl der Länge einer Raumdiagonale des Quaders eine ganze Zahl ist?
   122,244,663 und 236. Für die ersten drei Ziffern gibt es drei Kombinationsmöglichkeiten, für die vierte gibt es sechs.

$$P = \frac{günstige}{mögliche} = \frac{3 \cdot 3 + 6}{6^3} = \frac{15}{6^3} = \frac{5}{72}$$

4. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sei im kartesischen Koordinatensystem die Gerade $g_a : 4x + a^2y - 4a = 0$ gegeben.

a) Stellen Sie die Geraden g_a für a=4,a=2 und a=0 graphisch dar.



b) Gibt es Werte a, so dass der Punkt P(4/1) auf der Geraden g_a liegt?

$$\begin{aligned} 4 \cdot 4 + a^2 \cdot 1 - 4a &= 0 \\ a^2 - 4a + 16 &= 0 \\ D = 16 - 32 &< 0, \text{ keine Lösung} \end{aligned}$$

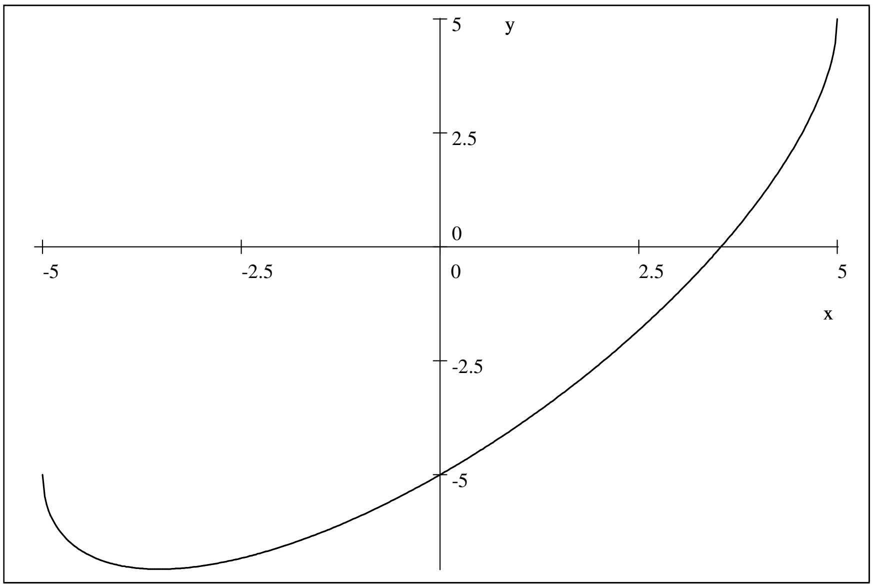
c) Die Schnittpunkte der Geraden g_a mit den Koordinatenachsen und der Punkt P seien die Eckpunkte eines Dreiecks. Gibt es ein a, für welches das Dreieck rechtwinklig ist mit rechtem Winkel in P?
Eine Lösung ist a=4, da hier die Schnittpunkte bei x=4 und y=1, also den Koordinaten von P, liegen.
Der Fall a=0 ist offenbar keine Lösung und fällt für das Weitere weg :

$$\begin{aligned} \text{Schnittpunkte mit den Achsen} &: \\ 4x - 4a &= 0 \\ x &= a \\ & N(a|0) \\ a^2y - 4a &= 0 \\ y &= \frac{4}{a} \\ & T\left(0|\frac{4}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PT} &= \begin{pmatrix} a-4 \\ 0-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-4 \\ \frac{4}{a}-1 \end{pmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PT} &= -4(a-4) - 1\left(\frac{4}{a} - 1\right) = 0 \\ \overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PT} &= 17 - \frac{4}{a} - 4a = 0 \\ a_1 &= 4, a_2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie die grösstmögliche Definitionsmenge von f in $\mathbb{R}$, diskutieren Sie dann die Funktion (ohne Wendepunkte zu bestimmen, aber vergessen Sie nicht den Graphen zu skizzieren), wenn
$f(x) = x - \sqrt{25 - x^2}$
Zeigen Sie auch, wie die Punkte mit vertikalen Tangenten berechnet werden.

$$\begin{aligned} 25 - x^2 &\geqq 0 \\ -5 &\leq x \leq 5 \\ D_f &= [-5; 5] \end{aligned}$$



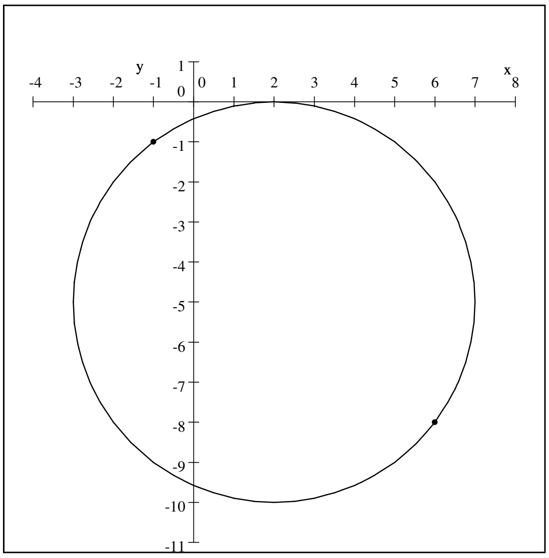
$$\begin{aligned} f(x) &= x - \sqrt{25 - x^2} = 0 \\ x &= \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} + 1 = 0 \\ x &= -\frac{5}{2}\sqrt{2}, y = -5\sqrt{2} \\ f''(x) &= \frac{25}{(25 - x^2)^{3/2}} > 0, \forall x \\ & \text{also Minimum} \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -5\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

$f'(x)$ ist bei $x = \pm 5$ im Gegensatz zu f nicht definiert, also hat f dort eine "unendliche" Steigung, bzw. vertikale Tangenten.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius eines Kreises, der die x-Achse berührt und durch die Punkte P(-1/-1) und Q(6/-8) geht.
x-Achse berühren bedeutet, dass $R = y_M$ ist :

$$\begin{aligned}
(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 &= R^2 \\
(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 &= y_M^2 \\
I. (-1 - x_M)^2 + (-1 - y_M)^2 &= y_M^2 \\
II. (6 - x_M)^2 + (-8 - y_M)^2 &= y_M^2 \\
x_M = 2, y_M = -5, R &= 5
\end{aligned}$$

$$k : (x-2)^2 + (y+5)^2 = 5^2$$



b) Die Tangente im Punkt $P(-8/y_T)$, wobei $y_T < 0$, des Kreises $x^2 + y^2 = 100$ begrenzt zusammen mit der x- und y-Achse ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?

$$\begin{aligned}
(-8)^2 + y^2 &= 100 \\
y &= \pm 6 \\
& P(-8|-6)
\end{aligned}$$

Die Tangente steht senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{OP}$:

$$t \quad : \quad \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte mit den Achsen

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \\
y &= -\frac{50}{3} \\
\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \\
x &= -\frac{25}{2} \\
A &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{625}{6}
\end{aligned}$$