Herbst 2008

1. Wir betrachten einen idealen Würfel und eine ideale Münze

   a) Ereignis A : Wir erzielen in 6 Würfen mit dem Würfel genau eine 6.
   Ereignis B : Wir erzielen in 6 Würfen mit der Münze genau 3-mal Kopf.

   Welches der beiden Ereignisse hat die grössere Wahrscheinlichkeit ?

$$P(A)=6\left(\frac{5}{6}\right)^5\frac{1}{6}=0{,}40188=40{,}2\%$$

$$P(B)=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}=0{,}3125$$

A ist offenbar etwas wahrscheinlicher als B.

b) (1) Spieler S1 darf den Würfel 20-mal werfen. Wie gross ist die WS, dass er mindestens einmal die 6 wirft ?
(2) Spieler S2 darf die Münze n-mal werfen und muss dabei mindestens einmal "Kopf" erzielen.
Wie gross muss n mindestens sein, damit seine Gewinnwahrscheinlichkeit höher als diejenige von S1 ist ?

c) $P(S_1) = 1 - P(keine\ 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20}$

$$P(S_2) = 1 - P(kein\ Kopf) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$P(S_2) > P(S_1)$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} > 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{20}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < \left(\frac{5}{6}\right)^{20}$$

$$n > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{20}$$

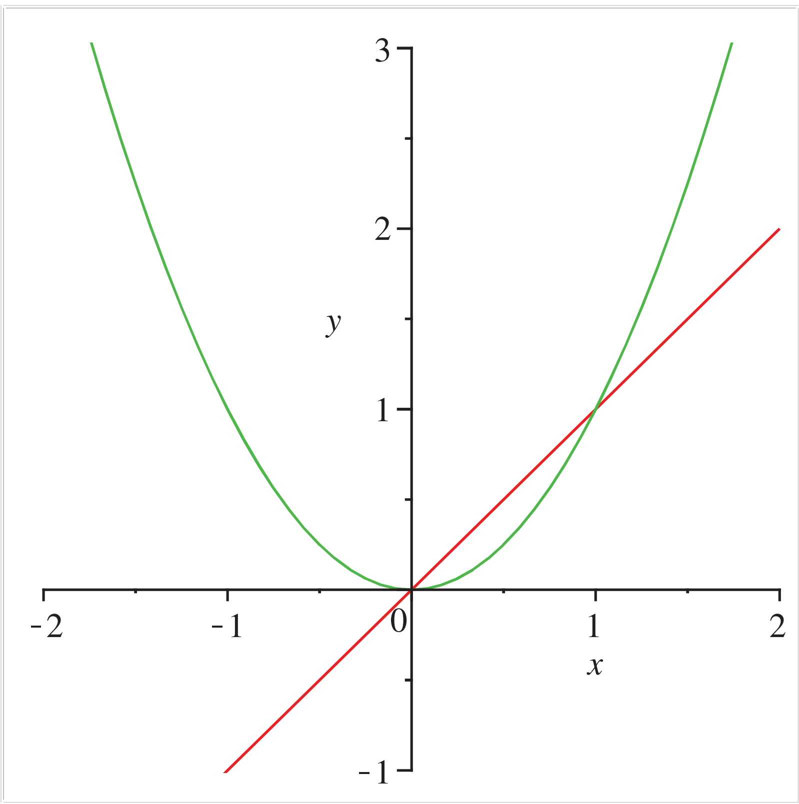
$$n > 5.28$$

$$n \geq 6$$

2.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = x$ *und* $g(x) = x^2$ mit den Definitionsmengen
$\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit der Einheit 2cm.
Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der beiden Graphen und in jedem Schnittpunkt den Schnittwinkel.
Wie gross ist der Inhalt der Fläche, die von den beiden Graphen eingeschlossen wird ?

$x = x^2$
$x^2 - x = 0$
$x(x-1) = 0$
$x_1 = 0; x_2 = 1$
$S_1(0|0); S_2(1|1)$
In S_1 ist der Schnittwinkel 45°, da dies der Steigungswinkel der Geraden ist und die Parabel im Scheitel die Steigung 0, also den Steigungswinkel 0° hat.
In S_2 ist die Steigung der Parabel :
$g'(x) = 2x$
$g'(1) = 2 = \tan\alpha$
$\alpha = \arctan 2 = 63,43°$
Also ist der Schnittwinkel 18,43°.



b) = Nun werden die Graphen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = ax^2 (a > 0)$ mit den Definitionsmengen $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ betrachtet.

Bestimmen Sie a>0 so, dass der Inhalt der von den beiden Graphen eingeschlossenen Fläche

24 Einheiten beträgt.

$x = a \cdot x^2$

$x(a \cdot x - 1) = 0$

$x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{a}$

$$\int_0^{\frac{1}{a}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{a}} \left(x - a \cdot x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{a}} = 24$$

$$\frac{1}{2\,a^2} - \frac{1}{3\,a^2} = 24$$

$a_1 = -\frac{1}{12}; a_2 = +\frac{1}{12}$

3. Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit der Definitionsmenge ℝ geht durch den Ursprung und besitzt im Wendepunkt W(1/-1) eine Wendetangente, welche durch den Punkte P (2/0)
läuft.
Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift und diskutieren Sie dann die Funktion.
Welchen Inhalt besitzt die durch G_f, Wendetangente und x-Achse begrenzte Fläche ?

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$f'(x) = 3\,a \cdot x^2 + 2\,b \cdot x + c$

$f''(x) = 6\,a \cdot x + 2\,b$

$f'''(x) = 6\,a$

I. $f(0) = 0 = d$

II. $f(1) = -1$

III. $f''(1) = 0$

IV. $f'(1) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_W - y_P}{x_W - x_P} = \dfrac{-1-0}{1-2} = 1$

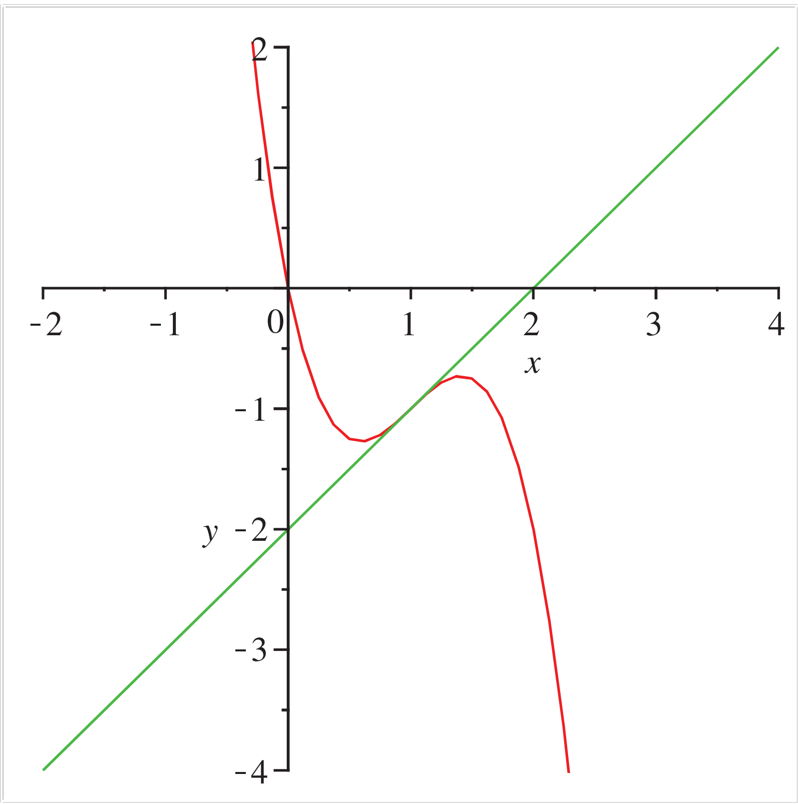
II. $a + b + c = -1$

III. $6\,a + 2\,b = 0$

IV. $3\,a + 2\,b + c = 1$

$a = -2,\ b = 6\ c = -5,$

$f(x) = -2\,x^3 + 6\,x^2 - 5\,x$



$f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 5x = 0$
$x(-2x^2 + 6x - 5) = 0$
$x_1 = 0$, $D < 0$ *keine weiteren Lösungen*

$f'(x) = -6x^2 + 12x - 5 = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{6}\sqrt{6}$$

$$f'(x_1) > 0 \Rightarrow Min\left(1 - \frac{1}{6}\sqrt{6} \middle| -0,443\right)$$

$$f'(x_2) < 0 \Rightarrow \text{Max}\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{6} \middle| 10,44\right)$$

$f''(x) = -12x + 12 = 0$
$x = 1$, $y = -1$
$f'''(1) \neq 0 \Rightarrow WP(1|-1)$

$$A = -\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$

$$A = -\int_0^1 (-2x^3 + 6x^2 - 5x)\,dx + \frac{1}{2}$$

$$A = -\left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_0^1 + \frac{1}{2}$$

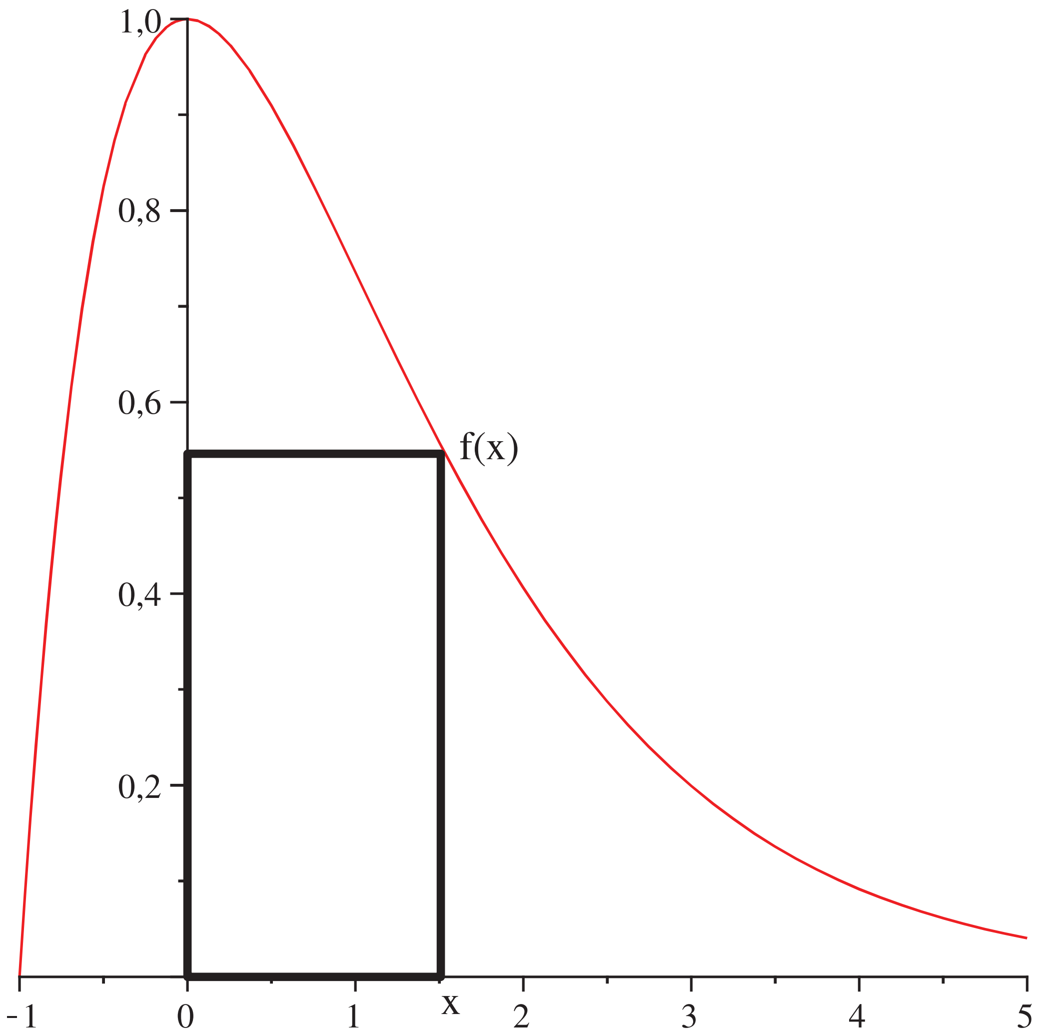
$$A = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

4. Von einem Rechteck wissen wir, dass eine Seite auf der positiven x-Achse, eine Seite auf der y-Achse und ein Eckpunkt auf dem Graphen von

$f(x) = (1+x)e^{-x}$, $D_f = \mathbb{R}$

liegt.

Wie müssen wir die Breite des Rechtecks wählen, damit dessen Flächeninhalt maximal wird ?



$A(x) = \text{"l*b"} = x \cdot f(x) = x \cdot (1+x) \cdot e^{-x} = \left(x + x^2\right) \cdot e^{-x}$

$A'(x) = (1+2x) \cdot e^{-x} + \left(x+x^2\right)\left(-e^{-x}\right)$

$A'(x) = \left(1+x-x^2\right) \cdot e^{-x} = 0$

$-x^2 + x + 1 = 0$

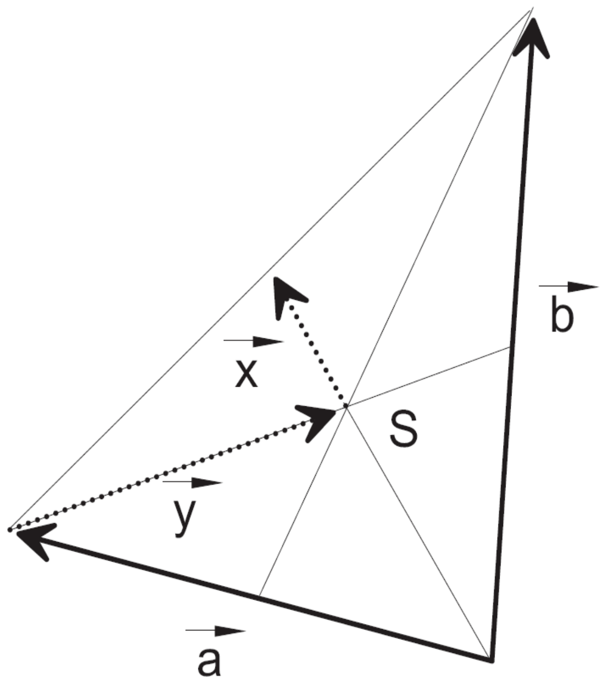
$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$A''(x) = (1-2x) \cdot e^{-x} + \left(1+x-x^2\right)\left(-e^{-x}\right)$

$A''(x) = \left(-3x + x^2\right) \cdot e^{-x}$

$A''\left(x_1\right) = -0,443 < 0 \Rightarrow$ ***Maximum***

5. (a) S ist der Schwerpunkt; berechnen Sie $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ je als Linearkombination von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$.



$$y = \frac{2}{3}\left(-\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right) = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$$
$$x = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\right) = \frac{1}{6}\boldsymbol{a} + \frac{1}{6}\boldsymbol{b}$$

(b) Von einem Dreieck ABC kennen wir A(-8/1), C(4/4) und den Schwerpunkt S(2/0).
Berechnen Sie die Länge der innerhalb des Dreiecks liegenden Winkelhalbierenden w_β.

$$r_S = \frac{1}{3}(r_A + r_B + r_C)$$
$$r_B = 3 \cdot r_S - r_A - r_C$$
$$r_B = 3\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$$

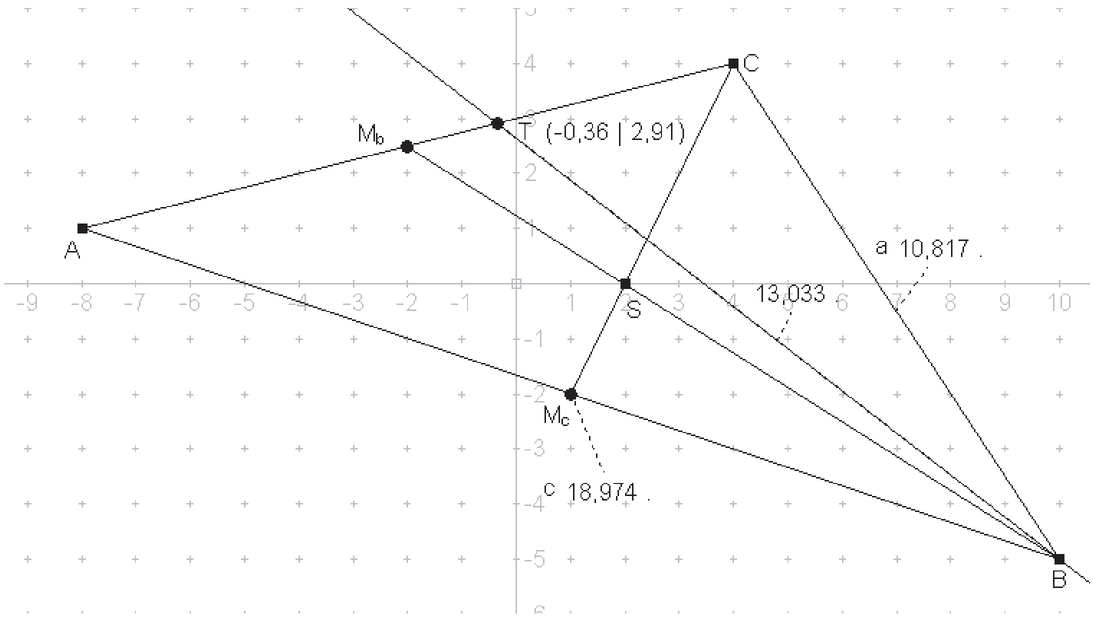
Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten :

$$AB = \begin{pmatrix}10+8\\-5-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\-6\end{pmatrix}$$
$$c = \sqrt{18^2 + 6^2} = 6\sqrt{10}$$
$$CB = \begin{pmatrix}10-4\\-5-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$$
$$a = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}$$

$$r_T = \frac{a \cdot r_A + c \cdot r_C}{a + c} = \frac{3\sqrt{13} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\sqrt{10}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{3\sqrt{13} + 6\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} -0,3572 \\ 2,9106 \end{pmatrix}$$

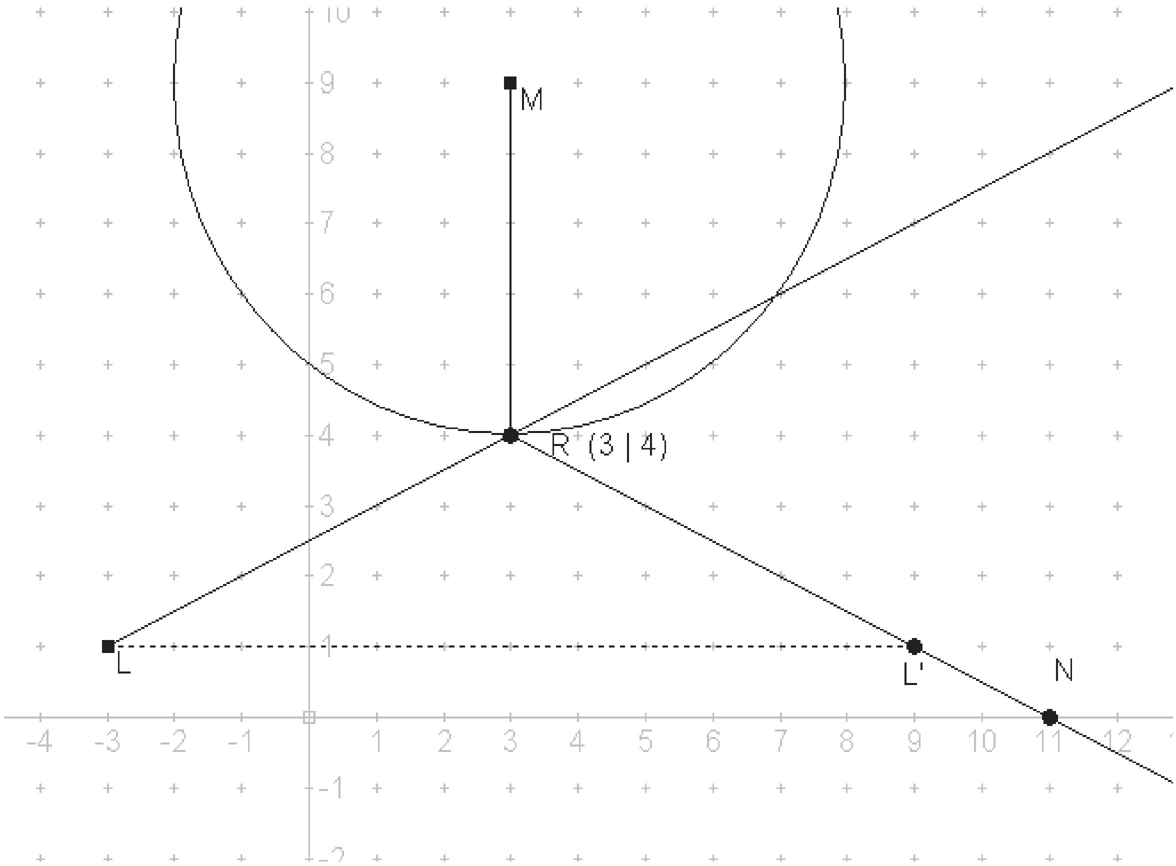
$$TB = \begin{pmatrix} 10 + 0,3572 \\ -5 - 2,9106 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,3572 \\ -7,9106 \end{pmatrix}$$

$$w_\beta = 13.03$$



6. Im Punkt L(-3/1) startet ein Strahl mit dem Richtungsvektor a=$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; dieser Strahl wird am Kreis mit dem Mittelpunkt M(3/9) und Radius r=5 reflektiert.

(a) Berechnen Sie den Kreispunkt R, in welchem der Strahl reflektiert wird.
(b) Berechnen Sie denjenigen Punkt, wo der reflektierte Strahl die x-Achse schneidet.



a)

$$g: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$k: (x-3)^2 + (y-9)^2 = 25$$

g **in** k:

$$(x-3)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{13}{2}\right)^2 = 25$$

$x_1 = 7, x_2 = 3$

$R(3|4)$

b)

R liegt genau unterhalb vom M. Somit ist RM die Symmetrie (Spiegel-) achse. Der Spiegelpunkt L' von L ist somit L'(9|1).
Die Gerade durch R und L hat die Steigung -1/2 und schneidet somit die x-Achse bei x=11.