

Kand-Nr : .....

<b>Note :</b>
---------------

Name, Vorname .....

---

**Dauer: 4 Stunden**

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und **schreiben Sie nur auf einer Seite der Blätter !**
- Schreiben Sie jedes Antwortblatt einzeln an.
  - Oben links: SMK, Passerellen, Sommer 09
  - Oben rechts: Kand.-Nummer, Name und Vorname
  - Nummerieren Sie die Blätter einzeln.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $e$ ,  $\pi$  etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.
- Resultate **ohne Herleitung** geben keine Punkte.
- Auf saubere Darstellung wird Wert gelegt.

# M A T H E M A T I K

1. Vier Mädchen und vier Knaben sitzen in einer Reihe.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit (*Resultate als vollständig gekürzte Brüche*), dass

- (a) die vier Mädchen nebeneinander sitzen ?  
(b) **nicht** abwechslungsweise ein Knabe neben einem Mädchen sitzt (und umgekehrt) ?

2. Einer Kugel mit bekanntem Radius  $r = 1$  ist ein gerader Kreiskegel einbeschrieben.

Suchen Sie die Höhe dieses Kegels so, dass dessen Oberfläche maximal wird (*ohne zu überprüfen, dass das Extremum ein Maximum ist*).

Die maximale Oberfläche muss nicht berechnet werden.

3. Berechnen Sie  $a \neq 0$  so, dass die Funktion  $h(x) = \sin 2x + a \cos x$  mit  $D_h = [0; 2\pi]$  für  $x = \frac{\pi}{6}$  ein Extremum besitzt.

Berechnen Sie anschliessend die Koordinaten aller Extrema (*x-Werte im Bogenmass als Bruchteile von  $\pi$ , y-Werte exakt, also **nicht** als Dezimalbruch*).

Wenn Sie den ersten Teil nicht lösen konnten, so fahren Sie mit dem Wert  $a = -2$  weiter.

4. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $f(x) = |x^3 - x^2 - 12x|$  mit  $D_f = \mathbb{R}$   
(  $|a|$  bedeutet den Betrag oder Absolutwert von  $a$  ).

Berechnen Sie nun den Flächeninhalt derjenigen beschränkten Flächen, die vom Graphen  $G_f$  und der  $x$ -Achse begrenzt werden.

5. Wie lang ist die gemeinsame Sehne der Kreise  $k_1 : x^2 + y^2 + 22x + 12y + 132 = 0$  und  $k_2 : x^2 + y^2 - 18x - 28y - 348 = 0$  ?

Welchen Radius müsste  $k_2$  haben, damit er den anderen Kreis **von innen** berührt, wenn man Mittelpunkt und Radius des Kreises  $k_1$  fest lässt ?

6. Betrachten Sie die beiden Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ , wobei  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- (a) Bestimmen Sie den Zwischenwinkel von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , wenn  $x = 1$  und  $y = 2$ .
- (b) Berechnen Sie  $(x, y)$  so, dass die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zueinander stehen.
- (c) Suchen Sie  $(x, y)$  so, dass die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zueinander stehen und zusätzlich  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  gilt.
- (d) Berechnen Sie  $(x, y)$  so, dass die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zueinander stehen und zusätzlich  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$  gilt.