Die Prüfung dauert 3 Stunden.

Kand-Nr : ....

Note :

Name, Vorname ....

Erreichte Punktzahl :

Korrigiert von :

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und
  schreiben Sie nur auf einer Seite der Blätter !
- Schreiben Sie jedes Antwortblatt einzeln an.
  - Oben links: SMK Passerelle Sommer 14
  - Oben rechts: Kand.-Nummer, Name und Vorname
  - Nummerieren Sie die Blätter einzeln.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, **e**, π etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 werden 45 Punkte verlangt.
- Resultate **ohne Herleitung** geben keine Punkte.
- Auf saubere Darstellung wird Wert gelegt.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg !

Kühne, Müller, Strickler

M A T H E M A T I K

1. Der Graph G_f einer quadratischen Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ geht durch den Punkt $Y\,(0/k)$, $k \in \mathbb{Q}$, und berührt die Gerade $g : y = -x + 2$ auf der x-Achse.

   (a) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift von f, falls $k = 0$ ist (G_f also durch den Ursprung geht).
   Wie gross ist in diesem Fall der Inhalt derjenigen Fläche, die durch g , G_f und die y-Achse begrenzt wird ?

   (b) Untersuchen Sie, ob die folgende Behauptung richtig ist:
   Für $k = \frac{1}{2}$ unterteilt G_f diejenige Fläche, die von der Geraden g und den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird, in zwei Teilflächen gleichen Inhalts.

2. Wir betrachten 4 Urnen und rote und blaue Kugeln.
   In der Urne U_1 befinden sich 5 rote und 5 blaue Kugeln.
   In der Urne U_2 befinden sich 4 rote und 6 blaue Kugeln.
   In der Urne U_3 befinden sich 3 rote und 7 blaue Kugeln.
   In der Urne U_4 befinden sich vorerst keine Kugeln.

   (a) Wir ziehen aus Urne U_1 und Urne U_2 je blind eine Kugel und legen diese zwei Kugeln in die Urne U_4. Dann ziehen wir aus dieser Urne U_4 wieder zufällig eine Kugel.
   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel rot ist?

   (b) Wir ziehen nun blind eine Kugel aus U_1 und legen sie in U_2. Dann ziehen wir blind eine Kugel aus U_2 und legen sie in U_3. Schliesslich ziehen wir wieder blind eine Kugel aus U_3 und legen sie in U_1.

      (1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir am Schluss wieder die Anfangssituation hergestellt haben?

      (2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich 4 rote und 6 blaue Kugeln in jeder der drei Urnen U_1 , U_2 und U_3 befinden?

3. Berechnen Sie $a \in \mathbb{Z}$ so, dass $x_\circ = \dfrac{\pi}{3}$ einer der Extremalwerte der Funktion

$$f(x) = a \sin x + \sin 2x \quad \text{mit} \quad D_f = [\, 0\,;\, 2\,\pi\, [$$

ist.

Bestimmen Sie dann die Nullstellen, alle weiteren Punkte mit horizontalen Tangenten *(x-Werte im Bogenmass als Bruchteile von π, y-Werte exakt, also **nicht** als Dezimalbruch)*, den Graphen und die Wertemenge.

4. Zwei Kreislinien k_1 und k_2 schneiden sich in den Punkten $A\,(12/5)$ und $B\,(12/11)$.

Der Mittelpunkt des einen Kreises liegt auf der Geraden $g : 3x - 2y - 32 = 0$.

Der Mittelpunkt des anderen Kreises liegt auf der Geraden h, wobei die Gerade h senkrecht zur Geraden g steht.

Die Geraden g und h und die Sekante durch A und B schneiden sich in einem Punkt P.

(a) Bestimmen Sie die Mittelpunkte und die Radien der beiden Kreise.

(b) Wie gross ist der Winkel, den die beiden Tangenten an die Kreise im Punkt A einschliessen?

5. Bestimmen Sie Nullstellen und Extremwerte der Kurvenschar

$$f_k(x) = (x^2 - k^2)\,\mathbf{e}^{-x^2} \quad \text{mit} \quad D_f = \mathbb{R}\,,\; k \in \mathbb{R}^+$$

in Abhängigkeit von k.

Skizzieren Sie nun den Graphen für $k = 1$.

Die Kurventangenten in den Nullstellen begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck, dessen Flächeninhalt $A(k)$ berechnet werden soll.

Wie müssen wir $k \in \mathbb{R}^+$ wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird ?